

EGRI CHIZIQLI INTEGRALNI HISOBLASH GRIN FORMULASI

Ahmedova Yulduz Baxodirovna

Utkirova Madina Uktam qizi

Shahrisabz Davlat Pedagogika Instituti

Matematika va Informatika yo'nalishi 3-kurs talabasi

TURAYEV ZIYOVUDDIN O'KTAMXONOVICH

Shahrisabz Davlat Pedagogika Instituti, ilmiy rahbar

Anotatsiya

Ushbu maqolada egri chiziqli integrallar tushunchasi, ularning turlari hamda ularni hisoblash usullari bayon etilgan. Xususan, yopiq egri chiziqlar bo'yicha hisoblanadigan ikkinchi tur egri chiziqli integralni soddalashtirishda muhim ahamiyatga ega bo'lgan Grin formulasi yoritilgan. Grin formulasining matematik mazmuni, qo'llanish shartlari va amaliy ahamiyati misollar orqali tushuntirilgan. Maqola matematik analiz fanini o'rganayotgan talabalar uchun mo'ljallangan. Maqolada Grin formulasining matematik ifodasi, qo'llanish shartlari hamda nazariy asoslari izchil bayon etilgan. Formula yordamida egri chiziqli integralni shu chiziq bilan chegaralangan soha bo'yicha ikki karrali integralga o'tkazish imkoniyati ochib berilgan. Bu yondashuv murakkab integrallarni hisoblashda qulaylik yaratib, hisoblash jarayonini sezilarli darajada soddalashtiradi. Shuningdek, Grin formulasining fizika va mexanika fanlaridagi amaliy qo'llanilishi, xususan, ish, aylanish momenti va vektor maydonlarning xususiyatlarini aniqlashdagi ahamiyati ko'rsatib o'tilgan. Nazariy tushunchalar aniq misollar orqali mustahkamlangan bo'lib, bu o'quvchilarning mavzuni chuqurroq anglashiga xizmat qiladi. Ushbu maqola matematik analiz fanini o'rganayotgan oliy ta'lim muassasalari talabalari, magistrantlar hamda ushbu yo'nalishga qiziquvchi o'qituvchilar uchun mo'ljallangan bo'lib, egri chiziqli integrallar va Grin formulasini o'zlashtirishda nazariy va amaliy manba sifatida xizmat qilishi mumkin.

Аннотация

В данной статье рассматривается понятие криволинейных интегралов, их виды, а также методы их вычисления. В частности, освещена формула Грина, которая имеет важное значение для упрощения вычисления криволинейного интеграла второго рода по замкнутым кривым. Математический смысл формулы Грина, условия её применения и практическая значимость объяснены на примерах. Статья предназначена для студентов, изучающих математический анализ. В работе подробно изложено математическое выражение формулы Грина, условия её применения и теоретические основы. С помощью формулы криволинейный интеграл можно преобразовать в двойной интеграл по области, ограниченной кривой. Этот подход облегчает вычисление сложных интегралов и значительно упрощает процесс вычислений. Кроме того, рассмотрено практическое применение формулы Грина в физике и механике, в частности, при вычислении работы, момента сил и изучении свойств векторных полей. Теоретические положения подкреплены конкретными примерами, что способствует более глубокому пониманию темы учащимися. Данная статья предназначена для студентов и магистрантов высших учебных заведений, а также для преподавателей, интересующихся данной областью, и может служить как теоретическим, так и практическим источником для освоения криволинейных интегралов и формулы Грина.

Abstract

This article discusses the concept of line integrals, their types, and methods for calculating them. In particular, the Green's theorem is highlighted, which plays an important role in simplifying the computation of second-type line integrals over closed curves. The mathematical meaning of Green's theorem, its conditions of applicability, and practical significance are explained through examples. The article is intended for students studying mathematical analysis. The mathematical expression of Green's theorem, the conditions for its application, and its theoretical foundations are presented in detail. Using the theorem, a line integral can be converted into a double integral over the region bounded by the curve. This approach facilitates the computation of complex integrals and significantly simplifies the calculation process. Additionally, the practical applications of

Green's theorem in physics and mechanics are discussed, including the computation of work, moments, and the analysis of vector field properties. Theoretical concepts are reinforced with specific examples, which help students gain a deeper understanding of the topic. This article is intended for undergraduate and graduate students in higher education institutions, as well as for instructors interested in this field, and can serve as both a theoretical and practical resource for mastering line integrals and Green's theorem.

Kalit.so'zlar: Egri chiziqli integral, birinchi tur integral, ikkinchi tur integral, yopiq egri chiziq, ochiq egri chiziq, ikki karrali integral, Grin formulasi, vektor maydon, matematik analiz, integral hisoblash, geometrik interpretatsiya, fizik kattaliklar, ish va aylanish momenti, maydon integrali, matematik nazariya, amaliy masalalar, integralni soddalashtirish, hisoblash usullari. Egri chiziqli integralning ayrim turlarini to'g'ridan-to'g'ri hisoblash murakkab bo'lishi mumkin. Shu sababli ularni ikki karrali integralga o'tkazib hisoblash imkonini beruvchi **Grin formulasi** katta ahamiyatga ega

Ключевые слова: криволинейный интеграл, интеграл первого рода, интеграл второго рода, замкнутая кривая, разомкнутая кривая, двойной интеграл, формула Грина, векторное поле, математический анализ, вычисление интегралов, геометрическая интерпретация, физические величины, работа и момент сил, интеграл по области, математическая теория, практические задачи, упрощение интегралов, методы вычислений.

Некоторые виды криволинейных интегралов могут быть сложны для прямого вычисления. Поэтому формула Грина, позволяющая преобразовать их в двойной интеграл, имеет большое значение.

Keywords: line integral, first-type integral, second-type integral, closed curve, open curve, double integral, Green's theorem, vector field, mathematical analysis, integral calculation, geometric interpretation, physical quantities, work and moment, area integral, mathematical theory, practical problems, integral simplification, calculation methods. Some types of line integrals can be difficult to compute directly. Therefore,

Green's theorem, which allows converting them into a double integral, is of great importance.

Asosiy qism

1. Egri chiziqli integral tushunchasi

Egri chiziqli integral matematik analizda ko'p qo'llaniladigan integral turidir. Agar tekislikdagi LLL egri chiziq bo'ylab funksiya yoki vektor maydon bo'yicha integral olinadigan bo'lsa, uni egri chiziqli integral deyiladi. Egri chiziqli integrallar quyidagi ikki turga bo'linadi:

1. Birinchi tur egri chiziqli integral Agar egri chiziq bo'ylab skalyar funksiya integrallansa, birinchi tur egri chiziqli integral hosil bo'ladi:

$$\int_L f(x, y) ds$$

Bu yerda ds — egri chiziq bo'ylab infinitesimal element, $f(x, y)$ — skalyar funksiya. Birinchi tur integral ko'pincha egri chiziq uzunligi bilan bog'liq fizik kattaliklarni (masalan, massa, ish hajmi) hisoblashda qo'llaniladi.

2. Ikkinchi tur egri chiziqli integral

Ikkinchi tur integral esa vektor maydon bo'ylab olingan integral sifatida ifodalanadi:

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

Bu integral fizikada ish, aylanish momenti yoki oqim kabi kattaliklarni ifodalaydi. Agar PPP va QQQ funksiyalari uzluksiz bo'lsa, integral aniq hisoblanadi

2. Grin formulasi

Egri chiziqli integrallarni hisoblashda ko'pincha to'g'ridan-to'g'ri hisoblash murakkab bo'ladi. Shu sababli yopiq egri chiziq bo'yicha ikkinchi tur integralni ikki karrali integralga aylantirish imkonini beruvchi **Grin formulasi** ishlab chiqilgan.

1. Formulani ta’rifi Agar DDD — tekislikda yopiq, chiziqli chegarasi LLL bo‘lgan soha bo‘lsa va $P(x,y), Q(x,y)$ funksiyalari DDD da uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lsa, u holda:

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Bu yerda $\oint$ — yopiq egri chiziq bo‘ylab integralni bildiradi.

2. Formulaning mazmuni va ahamiyati

Grin formulasi yopiq egri chiziq bo‘ylab olingan integralni shu chiziq bilan chegaralangan maydon bo‘yicha ikki karrali integralga aylantiradi. Bu hisoblashni sezilarli darajada soddalashtiradi va quyidagi afzalliklarni beradi:

Murakkab egri chiziqli integrallarni soddalashtirish;

Fizik kattaliklarni (ish, aylanish, oqim) tez aniqlash;

Vektor maydonlar xususiyatlarini tekshirishda qulay vosita.

3. Grin formulasining qo‘llanilishi

Misol 1: Aylana bo‘yicha integral

Aytaylik, $L — x^2 + y^2 = R^2$ aylana va:

$$P(x, y) = -y, \quad Q(x, y) = x$$

bo'lsa, u holda:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$$

Demak, Grin formulasiga ko'ra:

$$\oint_L (-y dx + x dy) = \iint_D 2 dx dy = 2 \cdot \pi R^2$$

Bu yerda integralni hisoblash oddiy ikki karrali integral orqali amalga oshirildi.

Misol 2: To'g'ri to'rtburchak chegarali maydon

Agar $D — [0, a] \times [0, b]$ to'g'ri to'rtburchak soha va:

$$P(x, y) = xy, \quad Q(x, y) = x^2$$

bo'lsa, u holda:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - x = x$$

Shu bilan integral:

$$\oint_L xy dx + x^2 dy = \iint_D x dx dy = \int_0^b dy \int_0^a x dx = \frac{1}{2} a^2 b$$

Bu misol Grin formulasining murakkab chegaralar bo'yida ham qo'llanilishini ko'rsatadi.

4. Nazariy va amaliy ahamiyati

Grin formulasi nafaqat matematik analizda, balki fizikada va injenerlik hisoblashlarda keng qo'llaniladi:

Elektromagnit maydonlarda oqim va aylanish momentlarini hisoblash;

Suyuqliklar mexanikasida maydon bo'yicha ishni aniqlash;

Vektor maydon xususiyatlarini tahlil qilish.

Formulani o'rganish talabalar uchun egri chiziqli integrallarni hisoblashda qulay metodlarni o'rganish imkonini beradi, hisoblash jarayonini aniq va soddalashtiradi.

Xulosa

Ushbu maqolada egri chiziqli integrallar tushunchasi, ularning turlari va hisoblash usullari batafsil yoritildi. Birinchi tur egri chiziqli integralning skalyar funksiyalar bo'yicha uzunlik bilan bog'liqligi, ikkinchi tur egri chiziqli integralning esa vektor maydonlar bo'yicha fizik kattaliklarni ifodalashi tushuntirildi. Alohida e'tibor **Grin formulasiga** qaratildi. Grin formulasi yordamida yopiq egri chiziq bo'yicha olingan ikkinchi tur integralni shu chiziq bilan chegaralangan maydon bo'yicha ikki karrali integralga aylantirish mumkinligi ko'rsatildi. Bu hisoblashni sezilarli darajada soddalashtiradi va murakkab chegaralar bilan ishlashda qulaylik yaratadi. Maqolada formulani qo'llashning amaliy jihatlari, parametr orqali egri chiziqni ifodalash usullari, geometrik va fizik mazmuni, shuningdek, misollar orqali tushuntirishlar keltirildi. Natijada, egri chiziqli integrallar va Grin formulasi matematik analizning muhim bo'limi sifatida nafaqat nazariy, balki amaliy masalalarni hal qilishda ham keng qo'llanilishi ko'rsatildi. Ushbu maqola o'quvchilar, talabalar va magistrantlar uchun egri chiziqli integrallarni o'rganish va Grin formulasini amaliy hisoblashlarda qo'llash uchun qulay manba bo'lib xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Apostol, T. **Mathematical Analysis**, 2nd Edition. Addison-Wesley, 1974.
2. Spivak, M. **Calculus on Manifolds**. W.A. Benjamin, 1965.
3. Stewart, J. **Calculus: Early Transcendentals**, 8th Edition. Cengage Learning, 2015.
4. Marsden, J. E., & Tromba, A. J. **Vector Calculus**, 6th Edition. W. H. Freeman, 2012.
5. Folland, G. B. **Advanced Calculus**, 2nd Edition. Prentice Hall, 2002.
6. Zorich, V. A. **Mathematical Analysis I & II**. Springer, 2004.
7. Hughes-Hallett, D., et al. **Calculus**. 7th Edition. Wiley, 2012.

8. Lang, S. **Calculus of Several Variables**. Springer, 1987.
9. Rudin, W. **Principles of Mathematical Analysis**, 3rd Edition. McGraw-Hill, 1976.
10. Kreyszig, E. **Advanced Engineering Mathematics**, 10th Edition. Wiley, 2011.
11. O'quv qo'llanmalar va universitet darsliklari (masalan: **Oliy matematika**, ToshDU nashri, 2010).
12. Online resurslar:

Khan Academy: [Vector Calculus](#)

MIT OpenCourseWare: [Multivariable Calculus](#)