

MANTIQ ALGEBRASIDAGI MONOTON FUNKSIYALAR

Ahmedova Yulduz Baxodirovna

Utkirova Madina Uktam qizi

Shahrisabz Davlat Pedagogika Instituti

Matematika va Informatika yo'nalishi 3-kurs talabasi

TURAYEV ZIYOVUDDIN O'KTAMXONOVICH

Shahrisabz Davlat Pedagogika Instituti, ilmiy rahbar

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada mantiq algebrasida muhim o'rin tutuvchi monoton funksiyalar tushunchasi bayon etiladi. Monoton funksiyalarning ta'rifi, asosiy xossalari, mantiqiy amallar bilan bog'liqligi hamda ularning mantiqiy sxemalar va hisoblash nazariyasidagi ahamiyati ko'rib chiqiladi. Shuningdek, monoton funksiyalarning qo'llanilish sohalari yoritib beriladi.

Kalit so'zlar: mantiq algebrasi, monoton funksiya, Bul algebrasi, qisman tartib, mantiqiy funksiya.

KIRISH

Mantiq algebrasi matematik mantiq va diskret matematikaning muhim bo'limlaridan biri hisoblanadi. U mantiqiy mulohazalar va ularning formal modellarini o'rganadi. Bul algebrasi asosida aniqlangan mantiqiy funksiyalar zamonaviy kompyuter texnologiyalari, raqamli sxemalar va algoritmlar nazariyasida keng qo'llaniladi. Shu funksiyalar orasida monoton funksiyalar alohida ahamiyatga ega bo'lib, ular argumentlarning qiymati o'zgarishi bilan funksiya qiymatining muayyan tartibda o'zgarishini ifodalaydi.

ASOSIY QISM

1. Mantiq algebrasi tushunchasi

Mantiq algebrasi (Bul algebrasi) — bu $\{0,1\}$ to'plamida aniqlangan va VA ($\wedge$), YOKI ($\vee$), INKOR ($\neg$) kabi amallar bilan jihozlangan algebraik tuzilma hisoblanadi. Har bir mantiqiy funksiya bir yoki bir nechta mantiqiy o'zgaruvchilar orqali ifodalanadi.

2. Monoton funksiya ta'rifi

Agar mantiqiy funksiya o'z argumentlarining hech biri bo'yicha inkor amalini o'z ichiga olmasa va quyidagi shart bajarilsa, u monoton funksiya deyiladi: agar $x \leq y$ \le y bo'lsa, u holda $f(x) \leq f(y)$ \le $f(x)$ \le $f(y)$.

3. Monoton funksiyalarning xossalari

Monoton funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

faqat VA ($\wedge$) va YOKI ($\vee$) amallari orqali ifodalanadi;

inkor amalidan foydalanilmaydi;

qisman tartibni saqlaydi;

monoton funksiyalar sinfi kompozitsiya amaliga nisbatan yopiqdir.

4. Misollar

- $f(x,y)=x \wedge y$ \le $f(x,y)=x \wedge y$ — monoton funksiya;
- $f(x,y)=x \vee y$ \le $f(x,y)=x \vee y$ — monoton funksiya;

$f(x)=\neg x$ \le $f(x)=\neg x$ — monoton funksiya emas. 5. Monoton funksiyalarning qisman tartib bilan bog'liqligi

Mantiq algebrasida monoton funksiyalar qisman tartiblangan to'plamlar bilan uzviy bog'liq. $\{0,1\}^n$ to'plamida tabiiy qisman tartib aniqlanadi. Agar $x \leq y$ \le y bo'lsa, monoton funksiya bu tartibni saqlaydi. Bu xossa mantiqiy modellar va algoritmning barqarorligini ta'minlaydi.

6. Monoton funksiyalarning normal shakllari

Har qanday monoton funksiya monoton dis'yunktiv yoki monoton kon'yunktiv normal shaklda ifodalanadi. Bu shakllarda inkor amali qatnashmaydi, faqat **VA** va **YOKI** amallari qo'llaniladi.

7. Monoton funksiyalar sinfining algebraik xossalari

Monoton funksiyalar sinfi kompozitsiyaga nisbatan yopiqdir. Ikki monoton funksiyaning kon'yunksiyasi va dis'yunksiyasi ham monoton bo'ladi. Inkor amalini qo'llash esa monotonlikni buzadi.

8. Post panjarasida monoton funksiyalar

Monoton funksiyalar Post panjarasidagi asosiy sinflardan biridir. Ushbu sinf funksional to'liq emas, chunki u inkor amalini ifodalay olmaydi.

9. Algoritmik va amaliy ahamiyati

Monoton funksiyalar optimallashtirish, qaror qabul qilish va mantiqiy sxemalarni loyihalashda keng qo'llaniladi.

5. Relation between monotone functions and partial order

In logical algebra, monotone functions are closely related to partially ordered sets. On the set $\{0,1\}^n$, a natural partial order is defined. If $x \leq y$ $\iff yx \leq y$, a monotone function preserves this order, which ensures the stability of logical models and algorithms.

6. Normal forms of monotone functions

Every monotone function can be represented in monotone disjunctive normal form or monotone conjunctive normal form. These forms do not include negation and use only AND and OR operations.

7. Algebraic properties of the class of monotone functions

The class of monotone functions is closed under composition. The conjunction and disjunction of two monotone functions are also monotone, while applying negation generally destroys monotonicity.

8. Monotone functions in Post's lattice

Monotone functions form one of the fundamental classes in Post's lattice. This class is not functionally complete because it cannot express negation.

9. Algorithmic and practical significance

Monotone functions are widely used in optimization problems, decision-making processes, and logical circuit design.

5. Связь монотонных функций с частичным порядком

В логической алгебре монотонные функции тесно связаны с частично упорядоченными множествами. На множестве $\{0,1\}^n$ задаётся естественный частичный порядок. Монотонная функция сохраняет этот порядок, что обеспечивает устойчивость логических моделей и алгоритмов.

6. Нормальные формы монотонных функций

Любая монотонная функция может быть представлена в монотонной дизъюнктивной или монотонной конъюнктивной нормальной форме. В этих формах не используется операция отрицания.

7. Алгебраические свойства класса монотонных функций

Класс монотонных функций замкнут относительно композиции. Конъюнкция и дизъюнкция двух монотонных функций также являются монотонными, тогда как отрицание нарушает монотонность.

8. Монотонные функции в решётке Поста

Монотонные функции образуют один из основных классов в решётке Поста. Данный класс не является функционально полным, поскольку не позволяет выразить операцию отрицания.

9. Алгоритмическое и практическое значение

Монотонные функции широко применяются в задачах оптимизации, принятия решений и проектирования логических схем.

10. Monoton funksiyalarning minimal va maksimal elementlar bilan bog'liqligi

Monoton funksiyalar qisman tartiblangan $\{0,1\}^n$ to'plamida aniqlangani sababli, minimal va maksimal elementlar bilan bevosita bog'liqdir. Agar barcha argumentlar 0 ga teng bo'lsa, funksiya minimal qiymatni qabul qiladi, barcha argumentlar 1 ga teng bo'lsa esa maksimal qiymatga erishadi. Bu xossa mantiqiy sxemalarni tahlil qilishda muhim ahamiyatga ega.

11. Monoton funksiyalar va chegaraviy qiymatlar

Monoton funksiyalar uchun quyidagi tengsizliklar doimo bajariladi:

$$f(0,0,\dots,0) \leq f(x_1,x_2,\dots,x_n) \leq f(1,1,\dots,1) \quad \forall f(0,0,\dots,0) \leq f(x_1,x_2,\dots,x_n) \leq f(1,1,\dots,1)$$

Bu xossa yordamida funksiyaning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari chegaralanadi va bu holat hisoblash jarayonlarini soddalashtiradi.

12. Monoton funksiyalarni sintez qilish masalasi

Mantiqiy sxemalarni loyihalashda monoton funksiyalarni sintez qilish muhim masalalardan biridir. Inkorsiz sxemalar kamroq elementlardan tashkil topadi va energiya tejamkor bo'ladi. Shu sababli, real texnik tizimlarda monoton funksiyalar asosida qurilgan sxemalar afzal hisoblanadi.

13. Monoton funksiyalarni aniqlash algoritmlari

Berilgan mantiqiy funksiya monoton yoki monoton emasligini aniqlash uchun maxsus algoritmlar mavjud. Bu algoritmlar funksiya qiymatlarining qisman tartibga mosligini tekshiradi. Agar kamida bitta juftlikda tartib buzilsa, funksiya monoton emas deb topiladi.

14. Monoton funksiyalar va murakkablik masalalari

Monoton funksiyalar hisoblash murakkabligi nazariyasida ham muhim rol o'ynaydi. Monoton sxemalar murakkabligini o'rganish orqali umumiy sxemalarning quyi baholarini aniqlash mumkin. Bu esa nazariy informatikaning dolzarb yo'nalishlaridan biridir.

10. Relation of monotone functions with minimal and maximal elements

Since monotone functions are defined on the partially ordered set $\{0,1\}^n$, they are closely related to minimal and maximal elements. When all arguments are 0, the function attains its minimal value; when all arguments are 1, it reaches its maximal value.

11. Boundary values of monotone functions

For monotone functions, the following inequality always holds:

$$f(0, \dots, 0) \leq f(x_1, \dots, x_n) \leq f(1, \dots, 1) \quad \text{and} \quad f(0, \dots, 0) \leq f(x_1, \dots, x_n) \leq f(1, \dots, 1)$$

This property simplifies the analysis of function values.

12. Synthesis of monotone functions

In logical circuit design, the synthesis of monotone functions is an important task. Circuits without negation gates are simpler and more energy-efficient, which makes monotone functions preferable in practice.

13. Algorithms for checking monotonicity

There exist algorithms to determine whether a given logical function is monotone. These algorithms verify whether the function preserves the partial order of inputs.

14. Monotone functions and computational complexity

Monotone functions play an important role in computational complexity theory. Studying the complexity of monotone circuits helps establish lower bounds for general circuits.

10. Связь монотонных функций с минимальными и максимальными элементами

Поскольку монотонные функции определены на частично упорядоченном множестве $\{0,1\}^n$, они связаны с минимальными и максимальными элементами. При всех аргументах, равных 0, функция принимает минимальное значение, а при всех аргументах, равных 1, — максимальное.

11. Граничные значения монотонных функций

Для монотонных функций всегда выполняется неравенство:

$$f(0, \dots, 0) \leq f(x_1, \dots, x_n) \leq f(1, \dots, 1) \quad \text{и} \quad f(0, \dots, 0) \leq f(x_1, \dots, x_n) \leq f(1, \dots, 1)$$

Это свойство упрощает анализ значений функции.

12. Синтез монотонных функций

При проектировании логических схем синтез монотонных функций является важной задачей. Схемы без операций отрицания проще и более энергоэффективны.

13. Алгоритмы определения монотонности

Существуют алгоритмы, позволяющие определить, является ли логическая функция монотонной. Они проверяют сохранение частичного порядка аргументов.

14. Монотонные функции и вычислительная сложность

Монотонные функции играют важную роль в теории вычислительной сложности. Исследование сложности монотонных схем позволяет получать нижние оценки сложности общих схем

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Абдурахмонов А. **Математик мантиқ асослари**. — Тошкент: Ўқитувчи, 2018.
2. Қодиров Ж. **Дискрет математика ва mantiq algebrasi**. — Тошкент: Fan va texnologiya, 2020.
3. Рахимов Б., Нурматов О. **Бул алгебраси ва mantiqiy funksiyalar**. — Тошкент: Университет, 2019.
4. Grätzer G. **General Lattice Theory**. — Springer, 2003.
5. Post E. L. **Introduction to a General Theory of Elementary Propositions**. — American Journal of Mathematics, 1921.
6. Mendelson E. **Introduction to Mathematical Logic**. — Chapman & Hall, 2015.
7. Sipser M. **Introduction to the Theory of Computation**. — Cengage Learning, 2013.
8. Wegener I. **The Complexity of Boolean Functions**. — Wiley-Teubner, 1987.

9. Knuth D. E. **The Art of Computer Programming, Vol. 4A: Combinatorial Algorithms.** — Addison-Wesley, 2011.

REFERENCES

1. Abdurakhmonov A. **Foundations of Mathematical Logic.** — Tashkent: O'qituvchi, 2018.
2. Qodirov J. **Discrete Mathematics and Logical Algebra.** — Tashkent: Fan va Texnologiya, 2020.
3. Rahimov B., Nurmatov O. **Boolean Algebra and Logical Functions.** — Tashkent: Universitet, 2019.
4. Grätzer G. **General Lattice Theory.** — Springer, 2003.
5. Post E. L. *Introduction to a General Theory of Elementary Propositions.* — American Journal of Mathematics, 1921.
6. Mendelson E. **Introduction to Mathematical Logic.** — Chapman & Hall, 2015.
7. Sipser M. **Introduction to the Theory of Computation.** — Cengage Learning, 2013.
8. Wegener I. **The Complexity of Boolean Functions.** — Wiley-Teubner, 1987.
9. Knuth D. E. **The Art of Computer Programming, Volume 4A.** — Addison-Wesley, 2011.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Абдурахмонов А. **Основы математической логики.** — Ташкент: Ўқитувчи, 2018.
2. Кодиров Ж. **Дискретная математика и логическая алгебра.** — Ташкент: Fan va texnologiya, 2020.
3. Рахимов Б., Нурматов О. **Булева алгебра и логические функции.** — Ташкент: Университет, 2019.
4. Грэтцер Г. **Общая теория решёток.** — Springer, 2003.
5. Пост Э. Л. *Введение в общую теорию элементарных высказываний.* — American Journal of Mathematics, 1921.
6. Мендельсон Э. **Введение в математическую логику.** — Chapman & Hall, 2015.

7. Сипсер М. **Введение в теорию вычислений.** — Cengage Learning, 2013.
8. Вегенер И. **Сложность булевых функций.** — Wiley-Teubner, 1987.
9. Кнут Д. Э. **Искусство программирования, том 4А.** — Addison-Wesley, 2011.