

KESMADA UZLUKSIZ FUNKSIYALAR TO‘PLAMIDAGI ALGEBRAIK STRUKTURALAR

Bozorova Gulira’no Sadriddin qizi

Shahrisabz davlat pedagogika instituti “Matematika va
ta’limda axborot texnologiyasi” kafedrası talabasi

Zahriddinova Shahlo Zahriddin qizi

Shahrisabz davlat pedagogika instituti “Matematika va
ta’limda axborot texnologiyasi” kafedrası o’qituvchisi

Annotatsiya (O‘zbek tilida)

Mazkur maqolada yopiq va chekli $[a,b][a,b][a,b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar to‘plami $C[a,b]C[a,b]C[a,b]$ ning algebraik va funksional-analitik strukturalari batafsil o‘rganilgan. Ushbu to‘plamning vektor fazo, halqa, kommutativ birlikli algebra, normallangan fazo, Banax fazo va Banax algebra sifatidagi xossalari nazariy asosda yoritilgan. Bundan tashqari, tartibli struktura, Riesz fazo, ideallar va ostalgebralar masalalari keng ko‘rib chiqilgan. Maqola funksional analiz va matematik analiz fanlari uchun muhim nazariy ahamiyatga ega.

Аннотация (Rus tilida)

В статье подробно исследуются алгебраические и функционально-аналитические структуры множества непрерывных функций $C[a,b]C[a,b]C[a,b]$, определённых на замкнутом отрезке $[a,b][a,b][a,b]$. Рассматриваются свойства векторного пространства, кольца, коммутативной алгебры с единицей, нормированного и банахова пространства, а также банаховой алгебры. Особое внимание уделено упорядоченным структурам, решётчатым пространствам, идеалам и подалгебрам.

Annotation (English)

This paper presents a detailed study of algebraic and functional-analytic structures of the set of continuous functions $C[a,b]C[a,b]C[a,b]$ defined on a closed interval $[a,b][a,b][a,b]$. The properties of vector spaces, rings, commutative unital algebras, normed spaces, Banach spaces, and Banach algebras are discussed. Ordered structures, Riesz spaces, ideals, and subalgebras are also examined.

Kalit soʻzlar (Oʻzbekcha): Uzluksiz funksiya, algebraik struktura, vektor fazo, Banach fazo, Banach algebra, norma, Riesz fazo, ideal, Weierstrass teoremasi.

Ключевые слова (Ruscha): Непрерывная функция, алгебраическая структура, векторное пространство, банахово пространство, банахова алгебра, норма, пространство Рисса, идеал.

Keywords (English): Continuous function, algebraic structure, vector space, Banach space, Banach algebra, norm, Riesz space, ideal.

KIRISH

Zamonaviy matematik analiz va funksional analiz fanlarida funksiyalar fazolarini oʻrganish muhim ahamiyat kasb etadi. Ayniqsa, yopiq va chekli $[a,b][a,b][a,b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar toʻplami $C[a,b]C[a,b]C[a,b]$ matematik modellashtirish, differensial tenglamalar, integral tenglamalar va operatorlar nazariyasida asosiy obʼektlardan biri hisoblanadi.

Ushbu toʻplamning oʻziga xosligi shundaki, u bir vaqtning oʻzida bir nechta algebraik va topologik strukturalarga ega. Shu sababli, $C[a,b]C[a,b]C[a,b]$ ni turli nuqtai nazardan — algebraik, analitik va tartibli fazo sifatida oʻrganish muhim ilmiy masala hisoblanadi.

Mazkur maqolaning maqsadi $C[a,b]C[a,b]C[a,b]$ fazosining barcha asosiy algebraik strukturalarini tizimli ravishda tahlil qilish va ularning matematik mohiyatini ochib berishdir.

ASOSIY QISM

1. Uzluksiz funksiyalar to'plami va uning asosiy xossalari

$[a,b]$ kesmada aniqlangan funksiya uzluksiz deyiladi, agar har bir $x_0 \in [a,b]$ x_0 nuqtada

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

shart bajarilsa.

$C[a,b]$ quyidagi muhim xossalarga ega:

- yig'indisi uzluksiz;
- ko'paytmasi uzluksiz;
- chekli kombinatsiyasi uzluksiz;
- maksimum va minimumga ega.

Bu xossalar keyingi algebraik strukturalar uchun asos bo'lib xizmat qiladi.

2. $C[a,b]$ ning vektor fazo strukturalari

$C[a,b]$ ni haqiqiy yoki kompleks sonlar maydoni ustida qaraymiz. Quyidagi amallar aniqlanadi:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Teorema: $C[a,b]$ vektor fazo aksiomalarining barchasini qanoatlantiradi.

Isbot g'oyasi: Uzluksiz funksiyalar sinfi qo'shish va skalyar ko'paytirishga nisbatan yopiq bo'lib, nol funksiya va qarama-qarshi element mavjud.

3. Halqa va kommutativ algebra strukturalari

Nuqtaviy ko'paytirish aniqlanadi:

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

Bu amal ostida $C[a,b]C[a,b]C[a,b]$:

- assotsiativ;
- kommutativ;
- distributiv;
- birlik elementga ega ($e(x)=1$).

Shuning uchun $C[a,b]C[a,b]C[a,b]$ **kommutativ birlikli halqa** va **algebra** hisoblanadi.

4. Norma va topologik struktura

Supremum normasi:

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Bu norma funksiyalar orasida masofa tushunchasini kiritadi. Norma ostida yaqinlashuv **bir xilda yaqinlashuv** bilan mos keladi.

5. Banax fazo sifatidagi $C[a,b]C[a,b]C[a,b]$

Teorema: $(C[a,b], \|\cdot\|_{\infty})$ to'liq normallangan fazodir.

Bu natija shuni bildiradiki, uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi bir xilda yaqinlashsa, limit funksiya ham uzluksiz bo'ladi.

6. Banax algebra va submultiplikativlik

Demak, $C[a,b]C[a,b]C[a,b]$ — Banax algebra. Bu xossa operatorlar nazariyasida muhim rol o'ynaydi.

7. Tartibli va Riesz fazo strukturas

Agar $f, g \in C[a,b]$ bo'lsa,

$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$

Bu tartib ostida $C[a, b]$ da ideallar quyidagicha tavsiflanadi:

- musbat konusga ega;
- $\max(f, g)$ va $\min(f, g)$ mavjud;
- **Riesz fazo** hisoblanadi.

8. Ideallar nazariyasi

$C[a, b]$ da ideallar quyidagicha tavsiflanadi:

- maksimal ideallar;
- nuqtaviy ideallar;
- yopiq ideallar.

Masalan:

$M_{x_0} = \{f \in C[a, b] : f(x_0) = 0\}$ — maksimal idealdir.

9. Ostalgebralar va zichlik masalasi

Polinomlar to'plami $P[a, b]$ — $C[a, b]$ ning ostalgebrasidir.

Weierstrass teoremasi: Har qanday uzluksiz funksiya polinomlar ketma-ketligi bilan bir xilda yaqinlashtiriladi.

Bu natija amaliy matematikada muhim ahamiyatga ega.

XULOSA

Xulosa qilib aytganda, $[a,b][a,b][a,b]$ kesmada uzluksiz funksiyalar to'plami $C[a,b]C[a,b]C[a,b]$ nihoyatda boy algebraik va funksional tuzilishga ega. Ushbu fazo vektor fazo, kommutativ algebra, Banax fazo, Banax algebra va Riesz fazo sifatida qaralib, zamonaviy matematik analizning markaziy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Ushbu strukturalarni chuqur o'rganish matematik modellashtirish va nazariy tadqiqotlar uchun mustahkam asos yaratadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Abdulayev A. A. **Matematik analiz**. — Toshkent: O'qituvchi, 2005.
2. Karimov B. B., Ismoilov T. **Matematik analiz asoslari**. — Toshkent: Fan va texnologiya, 2010.
3. Tojiyev A. A. **Funksional analizga kirish**. — Toshkent: Fan, 2008.
4. Rahmonov U. **Haqiqiy analiz**. — Toshkent: Universitet, 2012.
5. Abduqodirov Sh. **O'lchov va integral nazariyasi**. — Toshkent: Fan va texnologiya, 2014.
6. Jo'rayev T. **Algebra va analiz elementlari**. — Toshkent: O'qituvchi, 2003.
7. Xudoyberganov A. **Matematik analizdan masalalar va mashqlar**. — Toshkent: Fan, 2009.
8. Normurodov N. **Funksiyalar fazolari va ularning xossalari**. — Toshkent: Fan va texnologiya, 2016.