

TEYLOR QATORI, FUNKSIYALARNI TEYLOR QATORIGA YOYISH

ZAXRIDDINOVA SHAHLO ZAHRIIDDIN QIZI

Matematika va ta'limda axborot

texnologiyasi kafedrası òqituvchisi

MUSURMONOVA YAYRA NORBUTA QIZI

Shahrisabz davlat pedagogika instituti

Matematika va informatika yònalishi

1-bosqich talabasi

Annotatsiya. Bu maqola Teylor qatorini funksiyalarni lokal xususiyatlari orqali global tavsiflash imkonini beruvchi, ham nazariy, ham amaliy jihatdan muhim matematik vosita ekanligini ta'kidlaydi. U hisoblash jarayonlarini soddalashtirish va funksiyalarning xatti-harakatini tahlil qilish uchun asos yaratadi.

Абстрактный. В данной статье утверждается, что ряд Тейлора является важным математическим инструментом, как с теоретической, так и с практической точки зрения, позволяющим глобально описывать функции через их локальные свойства. Он служит основой для упрощения вычислительных процессов и анализа поведения функций.

Abstract. This article argues that the Taylor series is an important mathematical tool, both theoretically and practically, that allows for the global description of functions in terms of their local properties. It provides a basis for simplifying computational processes and analyzing the behavior of functions.

Kalit sòzlar. Teylor formulasining Lagranj ko`rinishdagi qoldiq hadi ,teylor ko`phadi, Peano ko`rinishdagi qoldiq hadli Teylor formulasi, teylor formulasining Koshi ko`rinishidagi qoldiq hadi.

Ключевые слова. Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа, умножение Тейлора, остаточный член в форме Пеано, формула Тейлора и остаточный член формулы Тейлора в форме Коши.

Key words. The residual term of the Taylor formula in Lagrange form, Taylor multiplication, the residual term in Peano form, Taylor formula, and the residual term of the Taylor formula in Cauchy form.

Taylor formulasi matematik analizning eng muhim formulalaridan biri bo`lib, ko`plab nazariy tatbiqlarga ega. U taqribiy hisobning negizini tashkil qiladi.

Taylor ko`phadi. Peano ko`rinishdagi qoldiq hadli Taylor formulasi. Ma`lumki, funksiyaning qiymatlarini hisoblash ma`nosida ko`phadlar eng sodda funksiyalar hisoblanadi. Shu sababli funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi qiymatini hisoblash uchun uni shu nuqta atrofida ko`phad bilan almashtirish muammosi paydo bo`ladi.

Nuqtada differensiallanuvchi funksiya ta`rifiga ko`ra agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo`lsa, u holda uning shu nuqtadagi orttirmasini  $\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$ , ya`ni

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$ ko`rinishda yozish mumkin. Boshqacha aytganda x_0 nuqtada differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya uchun birinchi darajali

$P_1(x)=f(x_0)+b_1(x-x_0)$ ko`phad mavjud bo`lib, $x\rightarrow x_0$ da $f(x)=P_1(x)+o(x-x_0)$ bo`ladi. Shuningdek, bu ko`phad $P_1(x_0)=f(x_0)$, $P_1'(x_0)=b=f'(x_0)$ shartlarni ham qanoatlantiradi. Endi umumiyroq masalani qaraylik. Agar $x=x_0$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan $y=f(x)$ funksiya shu nuqtada $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo`lsa, u holda

$$f(x)=P_n(x)+o(x-x_0) \quad (3.2)$$

shartni qanoatlantiradigan darajasi n dan katta bo`lmagan  $P_n(x)$  ko`phad mavjudmi?

$$\text{Bunday ko`phadni } P_n(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\dots+b_n(x-x_0)^n, \quad (3.3)$$

ko`rinishda izlaymiz. Noma`lum bo`lgan $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ koeffitsientlarni topishda

$$P_n(x_0)=f(x_0), P_n'(x_0)=f'(x_0), P_n''(x_0)=f''(x_0), \dots, P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0) \quad (3.4)$$

shartlardan foydalanamiz. Avval $P_n(x)$ ko'phadning hosilalarini topamiz:

$$P_n'(x)=b_1+2b_2(x-x_0)+3b_3(x-x_0)^2+ \dots +nb_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x)=2 \cdot 1b_2+3 \cdot 2b_3(x-x_0)+ \dots +n \cdot (n-1)b_n(x-x_0)^{n-2},$$

$$P_n'''(x)=3 \cdot 2 \cdot 1b_3+ \dots +n \cdot (n-1) \cdot (n-2)b_n(x-x_0)^{n-3},$$

$$P_n^{(n)}(x)=n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1b_n.$$

Yuqorida olingan tengliklar va (3.3) tenglikning har ikkala tomoniga x o'rniga x_0 ni qo'yib barcha $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ koeffitsientlar qiymatlarini topamiz:

$$P_n'(x_0)=f'(x_0)=b_1,$$

$$P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)=n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1b_n=n!b_n$$

Bulardan $b_0=f(x_0), b_1=f'(x_0), b_2=\frac{1}{2!}f''(x_0), \dots, b_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$ hosil qilamiz. Topilgan natijalarni (3.3) qo'yamiz va

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+ \dots +\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, \quad (3.5)$$

ko'rinishda ko'phadni hosil qilamiz. Bu ko'phad Teylor ko'phadi deb ataladi.

Teylor ko'phadi (3.2) shartni qanoatlantirishini isbotlaymiz. Funksiya va Teylor ko'phadi ayirmasini $R_n(x)$ orqali belgilaymiz: $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$. (3.4) shartlardan $R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\dots=R_n^{(n)}(x_0)=0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$, ya'ni $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$ ekanligini ko'rsatamiz. Agar $x \rightarrow x_0$

bo'lsa, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$ ifodaning 0/0 tipidagi aniqmaslik ekanligini ko'rish qiyin emas. Unga

Lopital qoidasini n marta tatbiq qilamiz. U holda

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \square = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0, \text{ demak } x \rightarrow x_0 \text{ da } R_n(x) = o((x-x_0)^n) \text{ o`rinli ekan.}$$

Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi:

Teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida n marta differensiallanuvchi bo`lsa, u holda $x \rightarrow x_0$ da quyidagi formula

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \quad (3.6)$$

o`rinli bo`ladi, bu yerda $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ Peano ko`rinishidagi qoldiq had.

Agar (3.6) formulada $x_0=0$ deb olsak, Teylor formulasining xususiy holi hosil bo`ladi:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + o(x^n). \quad (3.7)$$

Bu formula Makloren formulasi deb ataladi.

**Teylor formulasining Lagranj ko`rinishdagi qoldiq hadi.** Teylor formulasi  $R_n(x)$  qoldiq hadi yozilishining turli ko`rinishlari mavjud. Biz uning Lagranj ko`rinishi bilan tanishamiz.

Qaralayotgan $f(x)$ funksiya x_0 nuqta atrofida $n+1$ $\square$ tartibli hosilaga ega bo`lsin deb talab qilamiz va yangi $g(x) = (x-x_0)^{n+1}$ funksiyanı kiritamiz. Ravshanki,

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0; \quad g^{(n+1)}(x_0) = (n+1)! \neq 0.$$

Ushbu $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ va $g(x) = (x-x_0)^{n+1}$ funksiyalarga Koshi teoremasini tatbiq qilamiz. Bunda $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$ e`tiborga olib, quyidagini topamiz:

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{R_n'(c_1) - R_n'(x_0)}{g'(c_1) - g'(x_0)} = \frac{R_n''(c_2)}{g''(c_2)} = \dots =$$

$$\frac{R_n^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)} = \frac{R_n^{(n)}(x) - R_n^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)},$$

bu yerda $c_1 \in (x_0; x)$; $c_2 \in (x_0; c_1)$; ... ; $c_n \in (x_0; c_{n-1})$; $\xi \in (x_0; c_n) \subset (x_0; x)$.

Shunday qilib, biz $\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}$ ekanligini ko'rsatdik, bu yerda $\xi \in (x_0; x)$. Endi $g(x) = (x - x_0)^{n+1}$, $g^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$, $R_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$ ekanligini e'tiborga olsak quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0; x). \quad (3.8)$$

Bu (3.8) formulani Teylor formulasining Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadi deb ataladi.

Lagranj ko'rinishdagi qoldiq hadni

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (3.9)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin, bu yerda θ birdan kichik bo'lgan musbat son, ya'ni $0 < \theta < 1$.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi quyidagi shaklda yoziladi:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad \text{bu yerda } \xi \in (x_0; x).$$

Agar $x_0 = 0$ bo'lsa, u holda $\xi = x_0 + \theta(x - x_0) = \theta x$, bu yerda $0 < \theta < 1$, bo'lishi ravshan, shu sababli Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Makloren formulasi

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (3.10)$$

shaklida yoziladi.

**Taylor formulasining Koshi ko`rinishidagi qoldiq hadi.** Taylor formulasi qoldiq hadining boshqa ko`rinishlariga misol tariqasida Koshi ko`rinishidagi qoldiq hadni keltirish mumkin. Buning uchun

$$R_n(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n, \quad c \in (x_0; x) \quad (3.11) \text{ ko`rinishdagi qoldiq}$$

hadni chiqarish mumkin.

Agar (3.11) formulada $\psi(t)$ funksiya sifatida $\psi(t)=x-t$ funksiya olinsa, natijada Koshi shaklidagi qoldiq hadni hosil qilamiz:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}, \quad c = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1$$

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Kolmogorov A. N. tahriri ostida. Algebra va analiz asoslari. 10-11 sinflar uchun darslik. Toshkent, Oqituvchi, 1992-yil.
2. Vafoyev R. H. va boshqalar. Algebra va analiz asoslari. Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun oquv qollanma. Toshkent, Oqituvchi, 2001-yil.
3. Abduhamidov A. U. va boshqalar. Algebra va analiz asoslari. Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun sinov darsligi. Toshkent, Oqituvchi, 2001 yil.
4. Antonov K. P. va boshqalar. Elementar matematika masalalari toplami. Toshkent, Oqituvchi, 1975-yil va keyingi nashrlari.