

CHEGARALANMAGAN FUNKSIYANING XOSMOS INTEGRALI

RAHMATULLAYEVA MAXFUZA ISKANDAR QIZI

maxfuzaraxmatullayeva2005@gmail.com

Shahrisabz Davlat Pedagogika Instituti

Matematika va Informatika yo'nalishi 3-kurs talabasi

ZAHRIDDINOVA SHAHLO ZAHRIDDIN QIZI

Shahrisabz Davlat Pedagogika Instituti

Matematika va ta'limda axborot texnologiyasi

kafedrasi o'qituvchisi

Annotatsiya. Ushbu maqolada matematik analizning muhim bo'limlaridan biri bo'lgan chegaralanmagan funksiyaning xosmos (improper) integrali nazariyasining asosiy tushunchalari va xossalari keng yoritilgan. Chegaralanmagan funksiya ta'rif, ularning integrallanuvchanlik shartlari, xosmos integralning paydo bo'lish sabablari va hisoblash usullari ilmiy asoslarda bayon qilinadi. Shuningdek, integralning yaqinlashishi (konvergentligi) va uzoqlashishi (divergentligi) uchun zarur bo'lgan mezonlar, taqqoslash usullari, limitli tekshiruvlar hamda ularning amaliy misollardagi qo'llanilishi ko'rsatib beriladi. Maqolada berilgan nazariy ma'lumotlar va misollar talabalarga xosmos integrallar mohiyatini chuqur tushunishga, matematik tahlil ko'nikmalarini mustahkamlashga yordam beradi. Mazkur ish oliy ta'limda matematik analiz kursi bo'yicha o'rganiladigan mavzularni kengaytirish hamda ilmiy izlanishlar uchun dastlabki metodik asos sifatida xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: Chegaralanmagan funksiya, xosmos integral, improper integral, yaqinlashish, uzoqlashish, konvergentlik, divergentlik, cheksiz oraliq, limit orqali integral, taqqoslash mezoni, p-integral.

Abstract. This article extensively covers the basic concepts and properties of the theory of the improper integral of an unbounded function, which is one of the important sections of mathematical analysis. The definition of unbounded functions, the conditions for their integrability, the reasons for the appearance of the improper integral and the calculation methods are explained on a scientific basis. Also, the criteria necessary for the convergence and divergence of the integral, comparison methods, limit checks, and their application in practical examples are shown. The theoretical information and examples provided in the article will help students to deeply understand the essence of improper integrals and strengthen their mathematical analysis skills. This work serves as an initial methodological basis for expanding the topics studied in the mathematical analysis course in higher education and for scientific research.

Keywords: Unbounded function, proper integral, improper integral, approximation, divergence, convergence, divergence, infinite interval, integral over the limit, comparison criterion, p-integral.

Аннотация. В статье подробно рассматриваются основные понятия и свойства теории несобственного интеграла от неограниченной функции, являющейся одним из важных разделов математического анализа. На научной основе излагаются определение неограниченных функций, условия их интегрируемости, причины появления несобственного интеграла и методы его вычисления. Также приводятся критерии сходимости и расходимости интеграла, методы сравнения, проверки пределов и их применение в практических примерах. Приведённые в статье теоретические сведения и примеры помогут студентам глубже понять сущность несобственных интегралов и закрепить навыки математического анализа. Работа служит исходной методической базой для расширения тематики курса математического анализа в вузах и для проведения научных исследований.

Ключевые слова: Неограниченная функция, собственный интеграл, несобственный интеграл, приближение, расходимость, сходимость, расходимость, бесконечный интервал, интеграл над пределом, критерий сравнения, p-интеграл.

Kirish: Matematik analizning muhim yo'nalishlaridan biri bo'lgan integrallar nazariyasi turli funksiyalarni tadqiq etish, ularni amaliy jarayonlarga qo'llash va modellashtirishda katta ahamiyatga ega. Biroq barcha funksiyalarni oddiy Riman integrali yordamida integrallab bo'lmaydi. Chegaralanmagan funksiyaning xosmos integrali – funksiya biror nuqtada yoki oraliq bo'ylab chegaralanmagan holda o'zgaradigan, ammo integralni limit orqali aniqlash mumkin bo'lgan maxsus integral turidir. Bu integrallar matematikadagina emas, balki fizika, mexanika, iqtisodiyot, ehtimollar nazariyasi va texnika fanlarida ham keng qo'llaniladi. Masalan, potentsial maydonlar, elektr zaryadlar zichligi, taqsimot funksiyalari, hamda jarayonlarning uzoq masofadagi yoki noldagi xatti-harakatlarini o'rganishda xosmos integrallar alohida o'rin tutadi.

Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali.

Aniq integral mavjudligining zaruriy sharti integral ostidagi funksiyaning chegaralanganligi edi.

Endi $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da chegaralanmagan bo'lsin. Aniqrog'i, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$, ($\varepsilon < b-a$) uchun $f(x)$ funksiya $[a;b-\varepsilon]$ da chegaralangan va integrallanuvchi bo'lib, b nuqtaning atrofida chegaralanmagan bo'lsin. Bu holda b nuqta $f(x)$ funksiyaning *maxsus nuqtasi* deb ataladi.

Demak, ixtiyoriy t ($a < t < b$) uchun $\int_a^t f(x)dx$ integral mavjud bo'lib, u faqat t o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi:

$$\int_a^t f(x)dx = F(t), \quad a < t < b.$$

1-ta'rif. Agar $t \rightarrow b-0$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lsa, bu limit chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning $[a;b)$ oraliqdagi xosmas integrali deyiladi va u $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b-0} F(t) = \lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x)dx$$

Agar $t \rightarrow b-0$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib, u chekli bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, $f(x)$ funksiya esa $[a;b]$ da integrallanuvchi funksiya deb ataladi.

Agar $t \rightarrow b-0$ da $F(t)$ funksiyaning limiti cheksiz bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi. Yuqorida limit mavjud bo'lmagan holda ham biz xosmas integralni uzoqlashuvchi deymiz.

Xuddi yuqoridagidek, a nuqta $f(x)$ ning maxsus nuqtasi bo'lganda $(a;b]$ oraliq bo'yicha xosmas integral ta'riflanadi.

$f(x)$ funksiya $(a;b]$ oraliqda berilgan bo'lib, a nuqta shu funksiyaning maxsus nuqtasi bo'lsin. Bu funksiya $(a;b]$ ning istalgan $[t;b]$ ($a < t < b$) qismida integrallanuvchi, ya'ni ushbu

$$\int_t^b f(x)dx = F(t)$$

integral mavjud bo'lsin.

2-ta'rif. Agar $t \rightarrow a+0$ da $F(t)$ funksiyaning $\lim_{t \rightarrow a+0} F(t)$ limiti mavjud bo'lsa, bu limit chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning $(a;b]$ oraliqdagi xosmas integrali deb ataladi va u $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a+0} F(t) = \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b f(x)dx.$$

Agar $t \rightarrow a+0$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud va chekli bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi, $f(x)$ esa $(a;b]$ da integrallanuvchi funksiya deyiladi. Agar $t \rightarrow a+0$ da

$F(t)$ ning limiti cheksiz bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

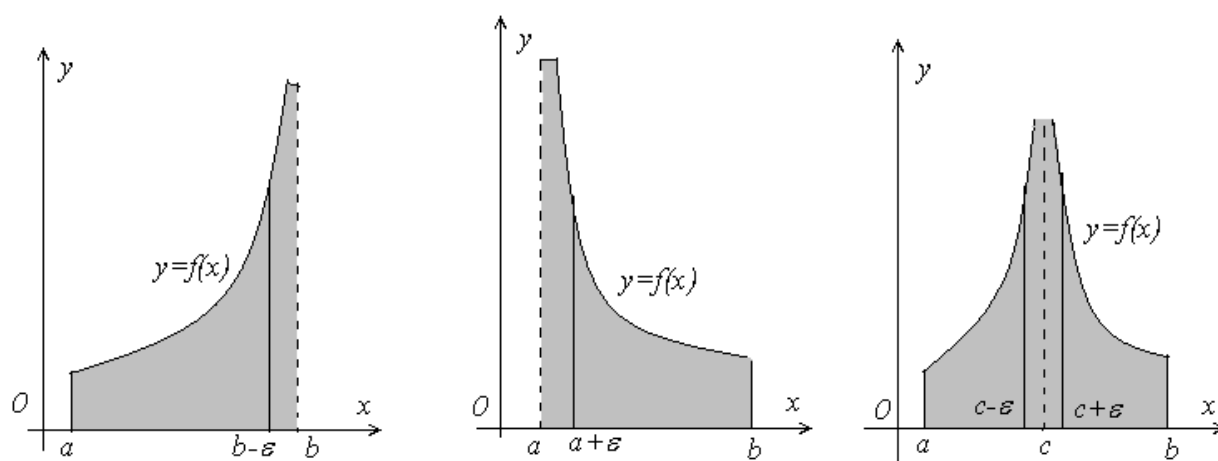
Yuqoridagi limit mavjud bo'lmagan holda ham biz integralni uzoqlashuvchi deymiz.

Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmaning biror ichki c nuqtasida $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ bo'lsa, u holda aniq integralning additivlik xossasiga o'xshash integralni ikkita integralning yig'indisi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow c-0} \int_a^t f(x)dx + \lim_{\tau \rightarrow c+0} \int_\tau^b f(x)dx.$$

Agar tenglikning o'ng tomonidagi limitlar mavjud bo'lsa, u holda xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

Geometrik nuqtai nazardan chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali $y=f(x)$ egri chiziq, $y=0$, $x=a$, $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan va $x \rightarrow b-0$ da ($x \rightarrow a+0$, $x \rightarrow c \pm 0$) Oy o'qi yo'nalishida cheksiz cho'zilgan figuraning chekli yuzga ega ekanligini anglatadi (8-rasm).



8-rasm

Chegaralanmagan funksiya xosmas integralining xossalari

Quyida maxsus nuqtasi b bo'lgan $f(x)$ funksiyaning $[a;b)$ oraliq bo'yicha olingan $\int_a^b f(x)dx$

xosmas integralining xossalari keltiramiz. Bu xossalarni maxsus nuqtasi a bo'lgan funksiyaning $(a;b]$ oraliq bo'yicha olingan xosmas integrallari uchun ham bayon qilish mumkin.

1⁰. Agar $f(x)$ funksiyaning $[a;b)$ dagi xosmas integrali yaqinlashuvchi bo'lsa, bu funksiyaning $[c;b)$, ($a < c < b$) oraliq bo'yicha integrali ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Bunda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

2⁰. Agar $\int_a^b f(x)dx$ va $\int_a^b \varphi(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy α, β

sonlar uchun

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta \varphi(x))dx$$

integral ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta \varphi(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b \varphi(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

3⁰. Agar $\int_a^b f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lib, $[a;b)$ da $f(x) \geq 0$

bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

bo'ladi.

4⁰. Agar $\int_a^b f(x)dx$ va $\int_a^b \varphi(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo'lib, $[a;b)$ da $f(x) \leq \varphi(x)$

bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$$

bo'ladi.

5⁰. $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $[a;b)$ da uzluksiz bo'lib, b esa ularning maxsus nuqtasi va $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, $x \in [a;b)$ bo'lsin. U holda

a) $\int_a^b \varphi(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi;

b) $\int_a^b f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b \varphi(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Misol tariqasida 3⁰ xossaning isbotini keltiramiz. Qolgan xossalar bevosita xosmas integral va uning yaqinlashuvchiligi ta'riflaridan kelib chiqadi.

3⁰ xossaning isboti. Aniq integralning xossalriga asosan $f(x) \geq 0$ bo'lsa, ixtiyoriy $t \in [a;b)$ uchun $\int_a^t f(x)dx \geq 0$ bo'ladi. Bundan

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x)dx \geq 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. G.M. Fichtenholz. Matematik analiz asoslari. 1–3 jild. – Moskva: Nauka, 2006.
2. K.A. Ross. Elementary Analysis: The Theory of Calculus. – Springer, 2013.
3. Piskunov N.S. Differensial va integral hisob. – Toshkent: O'qituvchi, 1995.

4. Rudin W. Principles of Mathematical Analysis. – McGraw-Hill, 1976.
5. Demidovich B.P. Matematik analizdan masalalar to‘plami. – Moskva: Nauka, 1989.
6. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Real funksiyalar nazariyasi. – Moskva: Nauka, 1972. 7. Apostol T.M. Mathematical Analysis. – Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
8. A. Xo‘jayev, R. Shodiyev. Matematik analiz. – Toshkent: Oliy ta’lim, 2010.
9. Goursat É. Cours d’Analyse Mathématique. – Paris: Gauthier-Villars, 1923.
10. Sidorov N., Krasnov M.L. Integral hisob asoslari. – Moskva: FizMatLit, 20