

EGRI CHIZIQLI INTEGRALNI HISOBLASH. GRIN FORMULASI

Pardayeva Sevinch Botir qizi

Shahrisabz Davlat Pedagogika instituti

“Matematika va ta’limda axborot texnologiyalari”

kafedrası talabasi

Zaxiriddinova Shahlo Zahiriddin qizi

Shahrisabz Davlat Pedagogika instituti

“Matematika va ta’limda axborot texnologiyalari”

kafedrası o‘qituvchisi

Annotatsiya

Ushbu akademik maqola ikki o'lchovli fazodagi egri chiziqli integrallarni hisoblashning muhim usullaridan biri, Grin formulasini har tomonlama tahlil qilishga bag'ishlangan. Maqolada dastlab egri chiziqli integrallarning nazariy asoslari, ularning fizik va muhandislik amaliyotidagi ahamiyati ko'rib chiqiladi. So'ngra, Grin formulasining shakllanishi, uning isbotining asosiy tamoyillari va ikki o'lchovli maydon integrali bilan egri chiziqli integral o'rtasidagi bog'liqlik mufassal bayon etiladi. Formulaning amaliy qo'llanilish misollari, jumladan, tekislikdagi maydonni hisoblash, kuch maydonida bajarilgan ishni aniqlash kabi holatlar tahlil qilinadi. Maqola Grin formulasining matematik fizika, gidrodinamika va elektromagnitizm sohalaridagi ahamiyatini ta'kidlaydi, shuningdek, uning yuqori o'lchovli integrallash teoremlari (Stoks va Gauss formulalari) uchun fundamental poydevor vazifasini o'tashini ko'rsatadi. Ushbu tadqiqot egri chiziqli integrallar va Grin formulasi bo'yicha nazariy va amaliy bilimlarni chuqurlashtirishga hissa qo'shishni maqsad qilgan.

Kalit soʻzlar: Egri chiziqli integral, Grin formulasi, Vektor maydoni, Chegaraviy shart, Maydon hisoblash, Potentsial funktsiya, Oqim, Sirt integrali

Abstract

This academic article is dedicated to a comprehensive analysis of Green's formula, one of the important methods for calculating line integrals in a two-dimensional space. The article initially examines the theoretical foundations of line integrals, their significance in physical and engineering applications. Subsequently, the formation of Green's formula, the basic principles of its proof, and the relationship between a two-dimensional field integral and a line integral are detailed. Practical application examples of the formula, including calculating area in a plane and determining work done in a force field, are analyzed. The article emphasizes the importance of Green's formula in mathematical physics, hydrodynamics, and electromagnetism, and also shows its role as a fundamental foundation for higher-dimensional integration theorems (Stokes' and Gauss' formulas). This study aims to deepen theoretical and practical knowledge regarding line integrals and Green's formula.

Keywords: Line integral, Green's formula, Vector field, Boundary condition, Area calculation, Potential function, Flux, Surface integral

Аннотация

Эта академическая статья посвящена всестороннему анализу формулы Грина, одного из важных методов вычисления криволинейных интегралов в двумерном пространстве. В статье сначала рассматриваются теоретические основы криволинейных интегралов, их значение в физических и инженерных приложениях. Далее подробно излагаются формирование формулы Грина, основные принципы ее доказательства и связь между двумерным интегралом по области и криволинейным интегралом. Анализируются примеры практического применения формулы, включая вычисление площади на плоскости и определение работы, совершаемой в силовом поле. Статья подчеркивает значение формулы Грина в математической физике, гидродинамике и электромагнетизме, а также показывает ее роль в качестве фундаментального основания для теорем интегрирования более высоких

размерностей (формул Стокса и Гаусса). Данное исследование направлено на углубление теоретических и практических знаний о криволинейных интегралах и формуле Грина.

Ключевые слова: Криволинейный интеграл, Формула Грина, Векторное поле, Граничное условие, Вычисление площади, Потенциальная функция, Поток, Поверхностный интеграл

Kirish

Integral hisob matematika va uning amaliy sohalarida, xususan, fizika, muhandislik va iqtisodiyotda markaziy o'rinni egallaydi. U nafaqat doimiy o'lchovli funksiyalarni tahlil qilish, balki murakkab shakllar va o'zgaruvchan maydonlarni o'rganishda ham muhim vosita hisoblanadi. An'anaviy aniq integrallar ma'lum bir oraliqdagi funksiya ostidagi yuzani ifodalasa, ularning umumlashtirilgan shakllari, masalan, egri chiziqli integrallar, fazoviy egri chiziqlar bo'ylab o'zgaruvchan miqdorlarni o'rganishga imkon beradi. Egri chiziqli integrallar, ayniqsa, kuch maydonida bajarilgan ishni hisoblash, suyuqlik oqimining miqdorini aniqlash, elektromagnit maydonlarning ta'sirini tahlil qilish kabi masalalarda muhim ahamiyat kasb etadi.

Ushbu integrallarning murakkabligini ba'zan Grin formulasi kabi kuchli teoremlar orqali sezilarli darajada soddalashtirish mumkin. Grin formulasi ikki o'lchovli tekislikdagi yopiq egri chiziq bo'ylab olingan egri chiziqli integral bilan ushbu egri chiziq bilan chegaralangan soha bo'ylab olingan ikki karrali integral o'rtasida fundamental bog'liqlikni o'rnatadi. Ingliz matematigi va fizigi J. Green tomonidan 1828 yilda taklif etilgan ushbu formula, matematik fizika rivojiga katta hissa qo'shgan va keyinchalik Stoks hamda Gauss formulalari kabi umumiyroq teoremlarning poydevori bo'lib xizmat qilgan (O'zbekiston Milliy Ensiklopediyasi, 2000).

Maqalaning asosiy maqsadi egri chiziqli integrallarning nazariy asoslarini har tomonlama tahlil qilish, Grin formulasining shakllanishi va uning isbotini chuqur o'rganish, shuningdek, uning amaliy qo'llanilishini misollar orqali ko'rsatishdan iborat. Bu jarayonda, egri chiziqli integrallarning birinchi va ikkinchi turini, ularning parametrlar bo'yicha ifodalarini, hamda kuch maydonlarida bajarilgan ish kabi fizik talqinlarini ko'rib

chiqish muhimdir. Grin formulasining ahamiyati nafaqat hisoblashni soddalashtirishda, balki turli matematik va fizik hodisalar o'rtasidagi chuqur konseptual aloqalarni ochib berishda ham namoyon bo'ladi. Ushbu tadqiqot Grin formulasining nazariy-amaliy ahamiyatini akademik doirada tushunish va qo'llashni boyitishga qaratilgan.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili

Egri chiziqli integrallar va Grin formulasi oliy matematika kurslarining ajralmas qismi bo'lib, ular haqida ko'plab darsliklar va ilmiy nashrlar mavjud. Adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, ushbu tushunchalar matematik fizika, vektor hisobi va differensial geometriya sohalarida chuqur o'rganilgan va keng qo'llaniladi. Umumiy qilib aytganda, egri chiziqli integrallarning nazariy asoslari har qanday ilg'or hisoblash kursida standart tarzda beriladi, ular asosan funksiyaning egri chiziq bo'ylab integrali va vektor maydonining egri chiziq bo'ylab sirkulyatsiyasi kabi ikkita asosiy turga bo'linadi.

J. Greenning nomi bilan bog'liq bo'lgan ushbu fundamental teorema, ikki o'lchovli fazoda egri chiziqli integralni yopiq kontur bilan chegaralangan soha bo'yicha ikki karrali integralga o'tkazish imkonini beradi, bu esa ko'pincha hisoblash jarayonini sezilarli darajada soddalashtiradi. O'zbekiston Milliy Ensiklopediyasi (2000) Grin formulasini integral hisobning asosiy formulalaridan biri sifatida ta'riflab, uning turli integrallar toifalari o'rtasida aloqalar o'rnatishga xizmat qilishini ta'kidlaydi. Xususan, tekislikdagi G sohasida olingan ikki karrali integralni uning S chegarasi bo'ylab olingan egri chiziqli integral bilan bog'lashi qayd etilgan. Bu ma'lumot formulaning umumiy qabul qilingan ta'rifini va uning tarixiy kelib chiqishini mustahkamlaydi.

Shuningdek, onlayn manbalarda ham ushbu mavzuga bag'ishlangan materiallar mavjudligi kuzatiladi. Masalan, Scribd platformasida "Egri Chiziqli Integrallar" sarlavhasi ostida hujjatlar topish mumkin (asadbekmajidov2899 tomonidan yuklangan, Scribd). Yana bir hujjat, "Grin Formulasi Va Uning Tadbiqu" sarlavhasi bilan mavjud bo'lib, bu formulaning nazariy jihatlari va amaliy qo'llanilishi bilan bog'liq materiallar borligini ko'rsatadi (javohirbekarchviz0107 tomonidan yuklangan, Scribd). Biroq, bu onlayn manbalarning sifati va akademik chuqurligi borasida aniq ma'lumotlar mavjud emas, chunki ularning foydalanuvchilar tomonidan reytinglari yoki foydalilik baholari mavjud

emasligi qayd etilgan. Bu holat, mavzuga oid chuqur, akademik jihatdan asoslangan va tizimli tahlilga bo'lgan ehtiyojni ta'kidlaydi.

Mavjud adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, Grin formulasining nazariy asoslari yaxshi o'rganilgan bo'lsa-da, uning turli sohalaridagi amaliy qo'llanilishining chuqur sintezi va zamonaviy talqini, ayniqsa, o'zbek tilidagi akademik manbalarda nisbatan kam uchraydi. Ushbu maqola Grin formulasini nafaqat hisoblash vositasi sifatida, balki chuqur matematik tushunchalar va fizik prinsiplar o'rtasidagi ko'prik sifatida ko'rib chiqish orqali mavjud bo'shliqni to'ldirishga intiladi.

Tadqiqot metodologiyasi

Ushbu maqolada egri chiziqli integrallarni hisoblashda Grin formulasini tahlil qilish uchun tizimli va analitik yondashuv qo'llaniladi. Tadqiqot metodologiyasi nazariy asoslarni mufassal bayon etish, formulaning shakllanishi va isbotini tushuntirish, shuningdek, uning amaliy ahamiyatini ko'rsatuvchi misollarni o'z ichiga oladi.

Dastlab, egri chiziqli integrallarning nazariy asoslari deduktiv tarzda tahlil qilinadi. Bunda, egri chiziqli integrallarning ikki turi – birinchi tur (yoy uzunligi bo'yicha integral) va ikkinchi tur (koordinatalar bo'yicha integral) – aniq ta'riflari, ularning parametrlar orqali ifodalari va fizik talqinlari batafsil ko'rib chiqiladi. Xususan, ikkinchi tur egri chiziqli integral vektor maydoni bo'ylab o'tishda bajarilgan ishni ifodalash kontekstida muhokama qilinadi, bu esa Grin formulasining asosiy kontekstini tashkil etadi. Egri chiziqlarning yo'nalishi va uning integral qiymatiga ta'siri ham alohida ta'kidlanadi.

Keyingi bosqichda Grin formulasining shakllanishi va isbotining asosiy g'oyalari bayon etiladi. Bu formulaning markazida yopiq kontur bo'ylab olingan ikkinchi tur egri chiziqli integralni ushbu kontur bilan chegaralangan tekis soha bo'yicha ikki karrali integralga bog'lovchi munosabat turadi:

$$\text{integral}(C) (P dx + Q dy) = \text{integral-integral}(D) ((dQ/dx - dP/dy) dA).$$

Bu yerda C - tekislikdagi musbat yo'naltirilgan yopiq egri chiziq, D - C bilan chegaralangan soha, $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ esa D sohada uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalardir. Grin formulasining isbotini tushuntirishda avval oddiy, masalan, to'g'ri

to'rtburchak shaklidagi D sohalar uchun Fundamental Hisob Teoremasi orqali isbotlanadi. Keyinroq, bu natija De'kstra teoremasi yordamida yoki sohani oddiy qismlarga bo'lish orqali umumiyroq sohalar uchun umumlashtiriladi. Isbotda P va Q funksiyalarining uzluksiz hosilalariga qo'yiladigan shartlar va yopiq konturning musbat yo'nalishi muhim ahamiyatga ega ekanligi ko'rsatiladi.

Grin formulasining hisoblash va qo'llash misollari metodologiyaning amaliy qismini tashkil etadi. Bunda, turli muhandislik va fizik masalalarni hal qilishda formulaning samaradorligi namoyish etiladi. Misol uchun:

Tekislikdagi yopiq sohaning yuzasini hisoblash: Grin formulasidan foydalanib, yopiq egri chiziq bilan chegaralangan sohaning yuzasini tekislik integrallariga o'tmasdan, faqat egri chiziq bo'ylab integral orqali aniqlash mumkin. Masalan, agar $P(x,y) = -y/2$ va $Q(x,y) = x/2$ deb olsak, u holda $dQ/dx - dP/dy = 1$ bo'ladi va $\text{integral-integral}(D) dA = \text{integral}(C) (-y/2 dx + x/2 dy)$ shaklida soha yuzasi topiladi. Bu usul, ayniqsa, ellips yoki boshqa murakkab shakllarning yuzasini hisoblashda qulaydir.

Kuch maydonida bajarilgan ishni aniqlash: Agar $F(x,y) = P(x,y) i + Q(x,y) j$ vektor maydoni berilgan bo'lsa, yopiq C konturi bo'ylab bajarilgan ish $\text{integral}(C) F dr = \text{integral}(C) (P dx + Q dy)$ orqali hisoblanadi. Grin formulasi bu integralni soha bo'yicha ikki karrali integralga aylantirish imkonini beradi. Bu esa, maydonning "sirkulyatsiyasini" tushunishga yordam beradi. Konservativ maydonlar (ya'ni, $dQ/dx - dP/dy = 0$ bo'lgan maydonlar) uchun yopiq kontur bo'ylab ish nolga teng bo'lishi Grin formulasidan bevosita kelib chiqadi.

Oqim masalalari: Vektor maydonining yopiq kontur orqali oqimini hisoblashda ham Grin formulasining modifikatsiyalangan shakllaridan foydalanish mumkin.

Ushbu misollar Grin formulasining nazariy universalizmini va uning turli amaliy kontekstlarda hisoblashni soddalashtirishdagi qudratini namoyish etadi. Metodologiyaning asosiy maqsadi Grin formulasining chuqur nazariy tushunchasini amaliy misollar orqali mustahkamlash, shuningdek, uning kengroq matematik va fizik prinsiplar bilan aloqasini ko'rsatishdir.

Xulosa

Ushbu maqolada egri chiziqli integrallar va Grin formulasining nazariy asoslari, isboti va amaliy qo'llanilishi atroflicha tahlil qilindi. Tadqiqot shuni ko'rsatdiki, egri chiziqli integrallar, xususan, vektor maydonlari bilan bog'liq bo'lgan masalalarda, masalan, kuchning bajarilgan ishini yoki suyuqlik oqimini hisoblashda muhim matematik vosita hisoblanadi. Biroq, ularning bevosita hisoblanishi ko'pincha murakkab bo'lishi mumkin.

Grin formulasi ushbu murakkablikni bartaraf etishda markaziy o'rinni egallaydi. U ikki o'lchovli tekislikdagi yopiq kontur bo'ylab olingan egri chiziqli integralni ushbu kontur bilan chegaralangan soha bo'yicha ikki karrali integralga o'tkazish orqali hisoblashni sezilarli darajada soddalashtiradi. J. Green tomonidan 1828 yilda kashf etilgan bu formula, nafaqat hisoblash samaradorligini oshiradi, balki integral hisobdagi turli tushunchalar o'rtasida chuqur konseptual aloqani ham o'rnatadi. Maqolada Grin formulasining shakllanishi, uning isbotining asosiy tamoyillari va funksiyalarga qo'yiladigan shartlar mufassal tushuntirildi.

Amaliy misollar, jumladan, tekislikdagi sohaning yuzasini aniqlash va kuch maydonida bajarilgan ishni hisoblash, Grin formulasining real muammolarni hal qilishdagi qudratini yaqqol namoyish etdi. Bu misollar formulaning nafaqat matematik jihatdan elegantligini, balki fizik hodisalarni tushunishdagi ahamiyatini ham ko'rsatadi.

Grin formulasining ahamiyati faqat ikki o'lchovli fazo bilan cheklanib qolmaydi. U, shuningdek, Stoks formulasi (uch o'lchovli fazoda egri chiziqli integralni sirt integraliga bog'laydi) va Gauss-Ostrogradskiy formulasi (sirt integralini hajm integraliga bog'laydi) kabi yuqori o'lchovli integrallash teoremlari uchun fundamental poydevor vazifasini o'taydi. Shu sababli, Grin formulasini chuqur tushunish, matematik fizika, gidrodinamika, elektromagnitizm va differensial geometriya kabi sohalarni o'zlashtirish uchun asosiy hisoblanadi.

Kelajak perspektivalarida Grin formulasini murakkabroq geometriyalar va nostandart shartlarda qo'llash, shuningdek, raqamli usullar bilan birgalikda uning samaradorligini oshirish bo'yicha tadqiqotlar davom ettirilishi mumkin. Shuningdek, uning kvant mexanikasi va nisbiylik nazariyasi kabi yangi sohalardagi potentsial tatbiqlarini o'rganish

ham muhim ilmiy qiziqish uyg'otadi. Ushbu maqola Grin formulasining matematik bilimlarni chuqurlashtirish va amaliy muammolarni hal qilishdagi beqiyos ahamiyatini yana bir bor tasdiqlaydi.

Foydalanilgan adabiyotlar

- [1] O'zbekiston Milliy Ensiklopediyasi: Grin formulalari, 1-jild. – https://n.ziyouz.com/books/uzbek_ensiklopediyalari/O'zbekiston%20Milliy%20Ensiklopediyasi%20-%20G.pdf
- [2] Kudryavtsev, L. D. (1988). Matematik analiz kursi. 2-jild. – https://www.mathnet.ru/php/publication.phtml?option_lang=eng&sid=14601&seriesid=2145
- [3] Piskunov, N. S. (1979). Differensial va integral hisob. 2-jild. – <https://www.twirpx.com/file/103982/>
- [4] Zorich, V. A. (2004). Mathematical Analysis II. – <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-19414-2>