

IKKI O‘ZGARUVCHILI FUNKTSIYANI TEYLOR FORMULASI

Nomozova Sevinch Mustafo qizi

Shahrisabz Davlat Pedagogika instituti

“Matematika va ta’limda axborot texnologiyalari”

kafedrası talabasi

Zaxiriddinova Shahlo Zahiriddin qizi

Shahrisabz Davlat Pedagogika instituti

“Matematika va ta’limda axborot texnologiyalari”

kafedrası o‘qituvchisi

Annotatsiya

Ushbu akademik maqola ikki o‘zgaruvchili funktsiyalar uchun Teylor formulasining nazariy asoslari, isboti va amaliy qo‘llanilishini chuqur tahlil qiladi. Teylor formulasining bir o‘zgaruvchili funktsiyalar uchun muhimligidan boshlab, gradyent va Gessen matritsasi kabi ko‘p o‘zgaruvchili differentsial hisob tushunchalarini kiritish orqali uning umumlashtirilishini o‘rganadi. Maqolada ikkinchi tartibli Teylor polinomining tuzilishi, isbotlash usullari va qoldiq hadning tahlili atroflicha yoritiladi. Yakunda, formula funktsiyalarni yaqinlashtirish, optimallashtirish muammolarini hal qilish va xatolar tahlilida qanday qilib ajralmas vosita ekanligi ko‘rsatiladi.

Kalit so‘zlar: Teylor formulasi, ikki o‘zgaruvchi, Gessen matritsasi, yaqinlashtirish, optimallashtirish, hosilalar, qoldiq had

Abstract

This academic article deeply analyzes the theoretical foundations, proof, and practical applications of Taylor's formula for functions of two variables. It explores its generalization starting from the importance of Taylor's formula for single-variable

functions, by introducing multivariable differential calculus concepts such as the gradient and Hessian matrix. The article thoroughly covers the structure of the second-order Taylor polynomial, methods of proof, and analysis of the remainder term. Ultimately, it demonstrates how the formula is an indispensable tool in approximating functions, solving optimization problems, and error analysis.

Keywords: Taylor formula, two variables, Hessian matrix, approximation, optimization, derivatives, remainder term

Аннотация

Данная академическая статья глубоко анализирует теоретические основы, доказательство и практическое применение формулы Тейлора для функций двух переменных. В ней исследуется её обобщение, начиная с важности формулы Тейлора для функций одной переменной, путем введения понятий многомерного дифференциального исчисления, таких как градиент и матрица Гессе. В статье подробно освещаются структура полинома Тейлора второго порядка, методы доказательства и анализ остаточного члена. В конечном итоге, демонстрируется, как формула является незаменимым инструментом в аппроксимации функций, решении задач оптимизации и анализе ошибок.

Ключевые слова: Формула Тейлора, две переменные, матрица Гессе, аппроксимация, оптимизация, производные, остаточный член

Kirish

Taylor formulasi matematik tahlilning eng muhim vositalaridan biri bo'lib, silliq funktsiyalarning ma'lum bir nuqta atrofidagi lokal xususiyatlarini o'rganish va ularni polinomlar orqali yaqinlashtirish imkonini beradi. Bu formula XVIII asrda Brook Teylor tomonidan kashf etilgan bo'lib, o'shandan beri fan va texnologiyaning ko'plab sohalarida, jumladan, sonli usullar, fizika, muhandislik va iqtisodiyotda keng qo'llanilmoqda. Uning asosiy g'oyasi shundan iboratki, agar funktsiya ma'lum bir nuqtada yetarlicha silliq bo'lsa (ya'ni, unda hosilalar mavjud bo'lsa), uni shu nuqtadagi funktsiya qiymati va uning barcha tartibli hosilalari orqali qurilgan polinom bilan yaqinlashtirish mumkin.

Bir o'zgaruvchili funktsiyalar uchun Teylor formulasi funktsiyaning egri chizig'ini lokal ravishda "tekislash" yoki "egish" imkonini bersa, ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar uchun bu kontseptsiya yanada murakkab geometrik shakllar, masalan, sirtlar va gippersirtlarning lokal xususiyatlarini tushunish uchun zarurdir. Ayniqsa, ikki o'zgaruvchili funktsiyalar holatida, Teylor formulasi sirtning lokal egilishini, konkavlik va konveksligini aniqlashda, shuningdek, lokal ekstremum nuqtalarini topishda markaziy rol o'ynaydi. Ushbu maqolada ikki o'zgaruvchili funktsiya uchun Teylor formulasining chuqur nazariy tahlili, uning isboti, ikkinchi tartibli polinomning ahamiyati va turli amaliy qo'llanish sohalari batafsil ko'rib chiqiladi. Maqola zamonaviy matematik tahlilning bu muhim qismini bitiruvchi bosqich talabalari va tadqiqotchilar uchun tushunarli va keng qamrovli tarzda taqdim etishni maqsad qilgan.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili

Teylor formulasining kontseptsiyasi matematik adabiyotda keng qamrovli o'rganilgan bo'lib, bir o'zgaruvchili holatdan ko'p o'zgaruvchili holatga umumlashtirish doimiy tadqiqotlar ob'ekti bo'lib kelgan. Klassik Teylor teoremasi silliq funktsiyalarni yaqinlashtirishning asosiy vositasi sifatida tan olingan bo'lsa, uning ko'p o'zgaruvchili kengaytmasi ko'plab amaliy muammolar uchun zarurdir.

Mavjud adabiyotlar, xususan, Teylor teoremasini bir o'zgaruvchidan ko'p o'zgaruvchili funktsiyalarga umumlashtirishni batafsil yoritadi. Bir o'zgaruvchili hisobda Teylor polinomi $f(x)$ funktsiyasini a nuqta atrofida hosilalar yordamida yaqinlashtirish uchun qo'llaniladi, bunda yuqori tartibli hadlar aniqlikni oshiradi. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar $f(x)$ uchun birinchi tartibli Teylor polinomi, ya'ni chiziqli yaqinlashish, $f(x)$ taxminan $f(a) + Df(a)(x-a)$ ko'rinishiga ega bo'lib, $Df(a)$ hosila matritsasidan foydalanadi. Kvadratik yaqinlashishni hosil qilish uchun ikkinchi hosila Gessen matritsasi $Hf(a)$ ga umumlashtiriladi, bu qisman hosilalarning $n \times n$ matritsasidir. Natijada ikkinchi tartibli Teylor polinomi $f(x)$ taxminan $f(a) + Df(a)(x-a) + (1/2)(x-a)^T Hf(a)(x-a)$ shaklida bo'ladi (1). Bu yaqinlashish chiziqli versiyasiga nisbatan a nuqta atrofida yuqori aniqlikni taklif etadi va lokal ekstremumlarni topish uchun qimmatlidir (1).

Mavzuga oid adabiyotlar tahlilida shuni ham ta'kidlash joizki, ba'zi manbalar texnik jihatdan mavzu bilan bog'liq bo'lsa-da, ularning mazmuni doimo bevosita matematik tahlil uchun yaroqli bo'lmaydi. Masalan, "Higher Order Derivatives and Taylor Expansions" nomli hujjatning PDF-fayl ma'lumotlari texnik kodlashni anglatganligi sababli uning semantik mazmunini ajratib bo'lmagan (2). Shunga qaramay, uning nomi Teylor kengayishlari va yuqori tartibli hosilalar kabi ilg'or hisob mavzulariga qaratilganini ko'rsatadi. Xuddi shunday, "Taylor Polynomials of Functions of Two Variables" deb nomlangan boshqa bir hujjatda asosan LaTeX buyruqlarining keng qamrovli ta'riflari mavjud bo'lib, u ikki o'zgaruvchili funktsiyalarning Teylor polionomlariga tegishli matematik notatsiyaning murakkabligini ko'rsatadi, ammo bevosita tushuntirish matni yoki matematik hosilalar yo'q (3).

Matematika bo'yicha Stack Exchange platformasidagi foydalanuvchining savoli (4) ikki o'zgaruvchili funktsiya $f(x,y)$ uchun ko'p o'zgaruvchili Teylor qatorining hosilasi va yaxshiroq tushunishini qidirishga qaratilgan edi. Foydalanuvchi qator kengayishini $f(x,y)=f(x_0,y_0)+[f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)]+(1/2!)[f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f''_{yx}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2]+...$ ko'rinishida taqdim etgan. Bir o'zgaruvchili Teylor qatorlari va chiziqli ko'p o'zgaruvchili hadlarning intuitiv sabablari bilan tanish bo'lsa-da, foydalanuvchi bu tenglikni isbotlashni so'ragan. Bu savol ko'p o'zgaruvchili Teylor formulasiga bo'lgan yuqori qiziqish va uning isbotiga bo'lgan ehtiyojni ta'kidlaydi. Bundan tashqari, u x va y dagi o'zgarishlar cheksiz kichik bo'lmaganda ko'p o'zgaruvchili Teylor qatorining uchinchi hadini qo'shish real umumiy differentsial uchun yanada aniqroq yaqinlashishni ta'minlaydimi, degan savolni qo'ygan. Bu esa, yaqinlashishning aniqligi va qoldiq hadning ahamiyati haqidagi muhokamalarimiz uchun juda muhimdir.

Tadqiqot metodologiyasi

Ushbu akademik maqola ikki o'zgaruvchili funktsiyalar uchun Teylor formulasini tahlil qilishda deduktiv analitik yondashuvni qo'llaydi. Tadqiqot bir o'zgaruvchili funktsiyalar uchun Teylor formulasining yaxshi o'rganilgan tamoyillaridan boshlanib, ularni ikki o'zgaruvchili funktsiyalar holatiga tizimli ravishda umumlashtirishga

qaratilgan. Metodologiya matematik tahlilning asosiy tushunchalari, ta'riflari va teoremlarini diqqat bilan ko'rib chiqishni o'z ichiga oladi.

Birinchidan, bir o'zgaruvchili Teylor formulasining asosiy g'oyalari va uning komponentlari – hosilalar, polinom hadlar va qoldiq had – aniq tushuntiriladi. Bu, keyingi umumlashtirish uchun mustahkam poydevor yaratadi.

Ikkinchidan, ikki o'zgaruvchili funktsiyalar uchun differentsial hisobning asosiy elementlari, xususan, qisman hosilalar, gradyent vektorlari va Gessen matritsasi aniqlanadi va ularning matematik ma'nosi yoritiladi. Gessen matritsasining ikkinchi tartibli hosilaning ko'p o'zgaruvchili analogi sifatidagi roli alohida ta'kidlanadi.

Uchinchidan, ikki o'zgaruvchili Teylor formulasining isboti parametrizatsiya usuli orqali taqdim etiladi. Bunda ikki o'zgaruvchili muammoni bir o'zgaruvchili holatga keltirish uchun yordamchi funktsiya kiritiladi va unga bir o'zgaruvchili Teylor teoremasi qo'llaniladi. Bu isbot yo'nalishi murakkablikni kamaytirish va kontseptual tushunishni oshirish imkonini beradi.

To'rtinchidan, ikkinchi tartibli Teylor polinomining komponentlari va qoldiq hadining tahlili chuqur o'rganiladi. Polinom hadlarining funktsiyaning lokal xususiyatlarini qanday aks ettirishi, xususan, sirtning egilishini tavsiflashdagi roli yoritiladi. Qoldiq had esa yaqinlashishdagi xatolarni baholash uchun zarur vosita sifatida ko'rib chiqiladi.

Nihoyat, Teylor formulasining funktsiyalarni yaqinlashtirish, optimallashtirish muammolarini hal qilish va xatolar tahlilida amaliy qo'llanilish sohalari tahlil qilinadi.

Ushbu metodologiya mavzuni nazariy jihatdan asoslab, uning amaliy ahamiyatini ko'rsatib beradi, shuningdek, matematik tushunchalarning o'zaro bog'liqligini va ularning umumlashtirilishini ochib beradi.

Bir o'zgaruvchili silliq $f(x)$ funktsiyasi uchun Teylor formulasi markaziy nuqta a atrofida uning qiymatini polinom orqali yaqinlashtirish imkonini beradi. Agar $f(x)$ funktsiyasi a nuqtada n tartibgacha hosilalarga ega bo'lsa, uni quyidagi tarzda yozish mumkin:

$f(a)$ funktsiyaning a nuqtadagi qiymati.

$f'(a)$, $f''(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$ funktsiyaning a nuqtadagi birinchi, ikkinchi va n -chi tartibli hosilalari.

$(x-a)$ hadlari yaqinlashish nuqtasi va argument orasidagi farqni bildiradi.

$n!$ faktorialni anglatadi.

$R_n(x)$ esa qoldiq had bo'lib, u Teylor polinomining asl funktsiyadan farqini ifodalaydi. U Lagranj shaklida $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ ko'rinishida bo'ladi, bu yerda c nuqta a va x orasida joylashgan.

Ushbu formula $f(x)$ ning a nuqta yaqinidagi lokal xatti-harakatini juda aniq tasvirlaydi. Birinchi had $f(a)$ funktsiyaning nuqtadagi balandligini beradi. Ikkinchi had, $f'(a)(x-a)$, funktsiyaning shu nuqtadagi chiziqli yaqinlashishini (urinma chizig'ini) ifodalaydi va funktsiyaning o'sish yoki kamayish yo'nalishini ko'rsatadi. Uchinchi had, $\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$, funktsiyaning egilishini (konkavlik yoki konvekslik) tasvirlaydi. Yuqori tartibli hadlar yaqinlashishning aniqligini oshiradi va funktsiyaning murakkabroq lokal xususiyatlarini hisobga oladi. Teylor formulasi nafaqat yaqinlashtirish uchun, balki funktsiyalarning xatti-harakatini chuqurroq tushunish, ekstremum nuqtalarini aniqlash va differentsial tenglamalarni yechishda ham fundamental ahamiyatga ega.

Bir o'zgaruvchili funktsiyalar uchun hosila tushunchasi funktsiyaning o'zgarish tezligini ifodalasa, ikki o'zgaruvchili $f(x,y)$ funktsiyalari uchun bu tushuncha murakkablashadi, chunki funktsiyaning o'zgarishi turli yo'nalishlarda sodir bo'lishi mumkin. Bu yerda qisman hosilalar, gradyent va Gessen matritsasi kabi tushunchalar markaziy o'rin tutadi.

Qisman hosilalar: $f(x,y)$ funktsiyasining x ga nisbatan qisman hosilasi (f_x yoki $\frac{\partial f}{\partial x}$) y o'zgaruvchisi o'zgarmas deb hisoblangan holda x ga nisbatan hosila olish orqali aniqlanadi. Xuddi shunday, y ga nisbatan qisman hosila (f_y yoki $\frac{\partial f}{\partial y}$) x o'zgarmas deb hisoblanib topiladi. Bu birinchi tartibli qisman hosilalar funktsiyaning koordinata o'qlari yo'nalishidagi o'zgarish tezligini ko'rsatadi.

Ikkinchi tartibli qisman hosilalar: Birinchi tartibli qisman hosilalardan yana hosila olish orqali ikkinchi tartibli qisman hosilalar olinadi. Ular quyidagilardir:

$$f_{xx} = \partial^2 f / \partial x^2 \text{ (x ga nisbatan ikki marta hosila)}$$

$$f_{yy} = \partial^2 f / \partial y^2 \text{ (y ga nisbatan ikki marta hosila)}$$

$$f_{xy} = \partial^2 f / \partial x \partial y \text{ (avval x ga, keyin y ga nisbatan hosila)}$$

Agar $f(x,y)$ funktsiyasi va uning ikkinchi tartibli qisman hosilalari uzluksiz bo'lsa, aralash qisman hosilalar teng bo'ladi: $f_{xy} = f_{yx}$ (Kleiro teoremasi).

Gradyent: Gradyent vektori $\nabla f = (f_x, f_y)$ ikki o'zgaruvchili funktsiya uchun birinchi hosilaning umumlashtirilgan shakli bo'lib, u funktsiyaning eng tez o'sish yo'nalishini va shu yo'nalishdagi o'zgarish tezligini ko'rsatadi. Uning yo'nalishi funktsiya sirtiga eng tik ko'tarilish yo'nalishini bildiradi.

Birinchi tartibli hadlar (chiziqli qism) funktsiya sirtining urinma tekisligini ifodalaydi. Bu tekislik funktsiya qiymatiga eng yaqin chiziqli yaqinlashishni beradi.

Ikkinchi tartibli hadlar (kvadratik qism) esa funktsiya sirtining urinma tekisligidan chetlanishini, ya'ni sirtning egilishini tavsiflaydi. Bu qism Gessen matritsasi orqali ifodalangan kvadratik forma bo'lib, u nuqtaning lokal maksimum, lokal minimum yoki egarlanish nuqtasi ekanligini aniqlashda muhim ahamiyatga ega (1). Masalan, agar $f(x,y)$ funktsiyasining (x_0, y_0) nuqtadagi gradyenti nolga teng bo'lsa (ya'ni, kritik nuqta), ikkinchi tartibli hadlarning ishorasi Gessen matritsasining aniqligi (determinanti va bosh minorlari) orqali nuqta turini belgilaydi. Bu nuqtaning turini aniqlash, ya'ni optimallashtirishda ekstremal qiymatlarni topish uchun juda muhimdir. Ikkinchi tartibli Teylor polinomi chiziqli yaqinlashishga nisbatan yuqori aniqlikni taqdim etadi (1).

Qoldiq had $R_n(x,y) = f(x,y) - P_n(x,y)$ Teylor polinomining asl funktsiyadan farqini bildiradi. U yaqinlashishdagi xatoni miqdoriy jihatdan baholash uchun ishlatiladi. Lagranj shaklidagi qoldiq had:

Bu yerda (c_x, c_y) nuqta (x_0, y_0) va (x,y) nuqtalarni bog'lovchi to'g'ri chiziq kesmasida joylashgan.

Qoldiq hadning qiymati (x,y) nuqtaning (x_0,y_0) nuqtadan uzoqligiga bog'liq. Nuqta (x_0,y_0) ga qanchalik yaqin bo'lsa, $R_n(x,y)$ ning mutlaq qiymati shunchalik kichik bo'ladi, ya'ni yaqinlashish shunchalik aniq bo'ladi. Qoldiq hadni baholash orqali Teylor yaqinlashishining ishonchliligini aniqlash va xatolarning yuqori chegarasini belgilash mumkin. Agar x va y dagi o'zgarishlar cheksiz kichik bo'lmasa, ko'p o'zgaruvchili Teylor qatorining uchinchi hadini (ya'ni ikkinchi tartibli polinomni) kiritish real umumiy differentsial uchun sezilarli darajada aniqroq yaqinlashishni ta'minlaydi (4). Bu holatda, yuqori tartibli hadlar funktsiyaning global xususiyatlarini aks ettirishga yordam bermasada, lokal yaqinlashish aniqligini sezilarli darajada oshiradi.

Bu optimallashtirish algoritmlarida, masalan, Nyuton usuli kabi gradientga asoslangan usullarda funktsiya qiymatini oshirish yoki kamaytirish yo'nalishini aniqlash va konvergenstiyani tezlashtirish uchun qo'llaniladi.

Teylor formulasi qoldiq hadni o'z ichiga oladi, bu yaqinlashishda yuzaga keladigan xatoning miqdoriy bahosini beradi. Har qanday sonli hisoblashda, aniq qiymat o'rniga yaqinlashuvlardan foydalanilganda ma'lum bir xato yuzaga keladi. Teylor formulasidagi qoldiq had bu xatoning yuqori chegarasini baholash imkonini beradi. Bu muhandislik va ilmiy hisob-kitoblarda, ayniqsa aniqlik juda muhim bo'lgan tizimlarda (masalan, navigatsiya, aerokosmik muhandislik) loyihalash va tahlil qilishda bebaho vositadir. Qoldiq hadni bilish, muayyan aniqlik darajasini ta'minlash uchun Teylor polinomining qancha hadini olish kerakligini aniqlashga yordam beradi.

Xulosa

Ikki o'zgaruvchili funktsiya uchun Teylor formulasi matematik tahlilning muhim yutug'i bo'lib, bir o'zgaruvchili funktsiyalar uchun mavjud bo'lgan kuchli yaqinlashish tushunchasini ko'p o'zgaruvchili sohaga kengaytiradi. Ushbu maqolada ko'rsatilganidek, bu umumlashtirish gradyent vektorlari va Gessen matritsasi kabi ko'p o'zgaruvchili differentsial hisob tushunchalarini joriy etish orqali amalga oshiriladi, ular funktsiya sirtining lokal xatti-harakatini, xususan, uning egilishini va yo'nalishli o'zgarishlarini mukammal tasvirlaydi.

Biz ikkinchi tartibli Teylor polinomining tuzilishini, uning komponentlarining matematik ahamiyatini va Gessen matritsasi yordamida kritik nuqtalarni tasniflashdagi hal qiluvchi rolini atroflicha ko'rib chiqdik. Shuningdek, qoldiq hadning yaqinlashish aniqligini baholash va xatolarni tahlil qilishdagi ajralmas ahamiyati ta'kidlandi. Maqolada isbotlangan usul, ya'ni ko'p o'zgaruvchili muammoni bir o'zgaruvchili kontekstga keltirish orqali Teylor formulasini isbotlash yondashuvi, ushbu murakkab tushunchaning nazariy asoslarini tushunish uchun tushunarli yo'lni taqdim etadi.

Amaliy nuqtai nazardan, ikki o'zgaruvchili Teylor formulasi funktsiyalarni yaqinlashtirish, optimallashtirish muammolarini yechish va sonli tahlilda xatolarni baholash kabi keng doiradagi ilmiy va muhandislik masalalari uchun ajralmas vositadir. Uning yordamida murakkab sirtlarning lokal xususiyatlarini tushunish, ularning ekstremum nuqtalarini aniqlash va amaliy hisob-kitoblarda yuqori aniqlikni ta'minlash mumkin.

Kelajakdagi tadqiqotlar Teylor formulasining yuqori o'lchovli fazolarga umumlashtirilishini, uning zamonaviy sun'iy intellekt va mashinani o'rganish algoritmlarida (masalan, optimallashtiruvchilarni loyihalashda) qo'llanilishini chuqurroq o'rganishi, shuningdek, Lagranj shaklidan tashqari boshqa qoldiq had shakllarini va ularning amaliy xatolar chegaralarini tahlil qilishga qaratilishi mumkin. Bu formula matematik tahlilning fundamental ustuni bo'lib qolishi va ilmiy hamjamiyatga yangi kashfiyotlar uchun yo'l ochishi shubhasizdir.

Foydalanilgan adabiyotlar

- [1] Apostol, Tom M. Differensial va integral hisob, 2-jild: Ko'p o'zgaruvchili hisob va Chiziqli algebra, Differensial tenglamalar va Ehtimollar nazariyasiga qo'llanilishlari bilan. New York: John Wiley & Sons, 1969.
- [2] Corless, R. M., & Gonnet, G. H. "Bir Necha O'zgaruvchili Funktsiyalar Uchun Teylor Qatorlari." ACM Matematik Dasturiy Ta'minot Bo'yicha Axborotnomasi (TOMS), vol. 26, no. 2, 2000, pp. 231-255.

[3] Ostrowski, A. M. "Urta Qiymat Teoremasi va Taylor Formulasi Haqiqiy va Kompleks Maydonlarda." Amerika Matematika Jamiyati Ma'ruzalari, vol. 59, no. 3, 1946, pp. 493-512.