

KESMANING IKKI CHETIDA BUZILADIGAN IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALALAR

Azizov Muzaffar Sulaymonovich

FarDU, matematik analiz va differensial tenglamalar
kafedrası katta o'qituvchisi

Mo'minmirzayeva Kamolaxon Xasanboy qizi

FarDU, Matematika
yo'nalishi 3-bosqich talabasi

Annotatsiya. Ushbu maqolada kesmaning ikki chetida buziladigan ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masalalar bayon qilingan va bu masala yechimi Grin funksiyalar usuli bilan topilgan.

Kalit so'zlar: buziladigan tenglama, chegaraviy masala, Grin funksiya, Gilbert teoremasi.

Kirish

Hozirgi kunda differensial tenglamalar tabiiy va texnik fanlarda keng qo'llaniladigan vositalardan biri bo'lib, ko'plab fizik, biologik va texnologik jarayonlarning matematik modellarini qurishda muhim ahamiyatga ega. Xususan, elastiklik nazariyasi [1], balka va plastinka masalalari [2], issiqlik o'tkazuvchanlik va turli xil texnologik jarayonlar to'rtinchi tartibli buziladigan oddiy differensial tenglamalarni tavsiflashda ko'plab uchraydi [3].

Buziladigan differensial tenglamalarni o'rganish va yechish bir qancha qiyinchiliklar va murakkabliklarni keltirib chiqaradi: aniq yechimlarni topishning murakkabligi, raqamli usullar barqarorligining zaifligi va chegaraviy shartlarga mos keluvchi yechimlarning mavjudlik shartlarini aniqlash zarurati [4-13].

Shu boisdan ham, buziladigan oddiy differensial tenglamalar uchun yangi usullarni ishlab chiqish va amaliy masalalarga qo'llash bugungi kunda dolzarb masalalardan biri bo'lib qolmoqda. Ushbu maqolada, buzilish parametriga ega bo'lgan oltinchi tartibli

differentensial tenglamalarning chegaraviy masalalari nazariy asoslari tahlil qilinadi, yechim usullari taklif etiladi va ularning samaradorligi ko'rsatkichlari baholanadi.

Bizga quyidagi

$$L[y] = -(p(x)y'(x))' = f(x), \quad x \in (-1,1) \quad (1)$$

tenglama berilgan bo'lib,

Agar $p(x)$ va $f(x)$ funksiyalar $[-1;1]$ kesmada uzluksiz bo'lib, $p(-1)=0$ va $p(1)=0$ bo'lsa, u holda (1) tenglama kesmaning ikki chetida buziladigan oddiy defferensial tenglama deyiladi.

Ko'p hollarda $p(x)$ funksiya

$$p(x) \geq p_0(x-1)^\alpha(x+1)^\beta$$

deb qaraladi.

$p(x)$ funksiya $x=-1$ va $x=1$ da 0 ga aylanish tartibiga qarab, (1) tenglama uchun chegaraviy masalalar turlicha qo'yiladi.

Agar (1) tenglama uchun u yoki bu shartlar bilan qo'yilgan chegaraviy masalaning yechimi

$$y(x) = \int_{-1}^1 G(x,s)f(s)ds \quad (2)$$

formula bilan aniqlansa, u holda $G(x,s)$ funksiya o'sha masalaning Grin funksiyasi deyiladi.

Quyidagi chegaraviy masalalarni qaraylik;

1-masala $(-1,1)$ oraliqda $-(p(x)y'(x))' = f(x)$ (3) tenglamani qanoatlantiradigan

hamda, $(p(x)y'(x))/_{x=-1} = 0, \quad y(1) = 0$ (4)

chegaraviy shartlarni bajaradigan $y(x)$ funksiya topilsin.

Ma'lumki, Grin funksiya usuli yordamida masala yechimi qidirilganda avvalo berilgan teoremaga umumiy yechim topiladi. U quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\begin{aligned}
 -(p(x)y'(x))' &= 0 \\
 -p(x)y'(x) &= C_1 \\
 -y'(x) &= \frac{C_1}{p(x)} \\
 -y(x) &= C \int_{-1}^x \frac{dt}{p(t)} + C_2
 \end{aligned} \tag{5}$$

Endi $\{(3),(4)\}$ masala uchun qanday G uchun funksiya tuzish kerak degan savol tug'iladi.

(5) umumiy yechimni (4) chegaraviy shartlarga bo'ysundiramiz.

$$(p(x)y'(x))|_{x=-1} = 0$$

chegaraviy shartlarga ko'ra $C_1 = 0$, $y(x) = 0$ shartlarda esa ekanligi kelib chiqadi.

Bundan ko'rinadiki (1) tenglamaga mos (4) shartlarni qanoatlantiruvchi yechim $y(x) = 0$ bo'ladi. $\{(3),(4)\}$ masalaning yechimini topish uchun oddiy Grin funksiyasi quramiz.

Bir jinsli tenglama umumiy yechimidan foydalanib Grin funksiyasini

$$G(x, s) = \begin{cases} A_1 \int_{-1}^x \frac{dt}{p(t)} + A_2, & -1 \leq x \leq s \\ B_1 \int_1^x \frac{dt}{p(t)} + B_2, & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ko'rinishida izlaymiz.

Bu yerda A_1 , A_2 , B_1 , B_2 lar noma'lum chegaraviy shartlardan foydalanib quyidagilarni topamiz.

$$A_1 = 0 \quad B_2 = 0$$

$$G(x, s) = \begin{cases} A_2, & -1 \leq x \leq s \\ B_1 \int_1^x \frac{dt}{p(t)}, & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Grin funksiyasi xossalariga ko'ra quyidagilarni hosil qilamiz.

$$\begin{cases} A_2 = B_1 \cdot \int_1^s \frac{dt}{p(t)} \\ B_1 \cdot \frac{1}{p(s)} = \frac{1}{p(s)} \end{cases}$$

$$B_1 = 1 \quad A_2 = \int_1^s \frac{dt}{p(t)}$$

Topilgan qiymatni o'rniga qo'yib Grin funksiyasini to'liq yozib olamiz.

$$G(x, s) = \begin{cases} \int_1^s \frac{dt}{p(t)}, & -1 \leq x \leq s \\ \int_1^x \frac{dt}{p(t)}, & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Gilbert teoremasiga ko'ra masalaning yechimi quyidagicha topiladi.

$$y(x) = \int_{-1}^x \left(\int_1^x \frac{dt}{p(t)} \right) f(s) ds + \int_x^1 \left(\int_1^s \frac{dt}{p(t)} \right) f(s) ds$$

2-masala. $(-1, 1)$ oraliqda

$$L[y] = -(p(x)y'(x))' = f(x) \quad (3)$$

tenglamani hamda

$$y(-1) = 0, \quad (p(x)y'(x))|_{x=1} = 0 \quad (6)$$

Chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $y(x)$ funksiya topilsin.

Masalaning yechimini Grin funksiya usuli yordamida qidiramiz. (3) tenglamaga bir jinsli tenglamaning yechimi,

$$y(x) = C_1 \int_{-1}^x \frac{dt}{p(t)} + C_2$$

(6) chegaraviy shartlardan $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan $y(x) = 0$ bo'lib, oddiy Grin funksiyasi quramiz.

Bir jinsli tenglama umumiy yechimidan foydalanib, Grin funksiysaini quyidagi ko'rinishda yozamiz

$$G(x, s) = \begin{cases} A_1 \int_{-1}^x \frac{dt}{p(t)} + A_2, & -1 \leq x \leq s \\ B_1 \int_1^x \frac{dt}{p(t)} + B_2, & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Bunda A_1 , A_2 , B_1 , B_2 lar nomalum.

Grinfunksiyasining shartlaridan, $G(-1, s) = A_2 = 0$, $p(x)G_x(x, s)|_{x=1} = B_2 = 0$ bo'ladi. Bundan

$$G(x, s) = \begin{cases} A_1 \int_{-1}^x \frac{dt}{p(t)}, & -1 \leq x \leq s \\ B_2, & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Grin funksiyasining xossalardan foydalansak,

$$B_2 = A_1 \int_{-1}^s \frac{dt}{p(t)}$$

$$-A_1 \frac{1}{p(s)} = \frac{1}{p(s)}$$

$$A_1 = -1 \quad B_2 = - \int_{-1}^s \frac{dt}{p(t)}$$

Demak, Grin funksiyasining to'liq ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$G(x, s) = \begin{cases} - \int_{-1}^x \frac{dt}{p(t)}, & -1 \leq x \leq s \\ - \int_{-1}^s \frac{dt}{p(t)}, & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Gilbert teoremasiga ko'ra $\{(3), (6)\}$ masalaning yechimi ushbu ko'rinishda topiladi:

$$y(x) = - \int_{-1}^x \left(\int_{-1}^s \frac{dt}{p(t)} \right) f(s) ds - \int_x^1 \left(\int_{-1}^s \frac{dt}{p(t)} \right) f(s) ds$$

3-masala. $(-1, 1)$ oraliqda $L[y] = -(p(x)y'(x))' = f(x)$ (3) tenglamani hamda

$$(p(x)y'(x))|_{x=-1} = 0, \quad (p(x)y'(x))|_{x=1} = 0, \quad (7)$$

chegaralarni qanoatlantiruvchi $y(x)$ funksiya topilsin. (3) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = C_1 \int_{-1}^x \frac{dt}{p(t)} + C_2 \quad (3)$$

bo'ladi.

(7) chegaraviy shartlarga ko'ra $C_1 = 0$ bo'lib, $y = C_2 \neq 0$ bo'ladi va umumlashgan

Grin funksiyasi tuziladi. Buning uchun $y(x) = C_2$ yechimni normallashtiramiz. Bunda

$$y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ bo'lib, } L(y) = y_0(x)y_0(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \text{ bo'ladi.}$$

Endi bir jinsli bo'lmagan $-(p(x)y'(x))' = \frac{1}{2}$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

$$\begin{aligned}(p(x)y(x))' &= -\frac{1}{2} \\ p(x)y(x) &= -\frac{1}{2}x + C_1 \\ y'(x) &= \frac{-\frac{1}{2}x + C_1}{p(x)} \\ y(x) &= \int_{-1}^x \frac{(C_1 - t)dt}{2p(t)} + C_2\end{aligned}\quad (8)$$

(8) yechimdan foydalanib, Grin funksiyasini quyidagi ko'rinishda izlaymiz.

$$G(x, s) = \begin{cases} \int_{-1}^x \frac{(A_1 - t)dt}{2p(t)} + A_2, & -1 \leq x \leq s \\ \int_{-1}^s \frac{(B_1 - t)dt}{2p(t)} + B_2, & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Bunda A_1 , A_2 , B_1 , B_2 lar nomalumlar.

Chegaraviy shartlardan foydalanib, quyidagilarni topamiz.
 $(p(x)y'(x))|_{x=1} = 0$ ekanligidan $B_1 = 1$, $(p(x)y'(x))|_{x=-1} = 0$ ekanligidan $A_1 = -1$ ekanligi kelib chiqadi.

$$G(x, s) = \begin{cases} -\int_{-1}^s \frac{(1+t)dt}{2p(t)} + A_2 \\ \int_{-1}^x \frac{(1-t)dt}{2p(t)} + B_2 \end{cases}$$

Grin funksiyasining xossalaridan

$$-\int_{-1}^s \frac{(1+t)dt}{2p(t)} + A_2 = \int_{-1}^s \frac{(1-t)dt}{2p(t)} + B_2$$

$$A_2 = B_2 + \int_{-1}^s \frac{dt}{p(t)}$$

tenglikni xosil qilamiz va Grin funksiyasi formulasiga qo'yamiz.

$$G(x, t) = \begin{cases} -\int_{-1}^s \frac{(1+t)dt}{2p(t)} + \int_{-1}^s \frac{dt}{p(t)} + B_2 \\ -\int_{-1}^x \frac{(1-t)dt}{2p(t)} + B_2 \end{cases}$$

Noma'lum o'zgarmas B_2 ni $\int_{-1}^1 G(x, s)dx = 0$ shartdan topamiz.

$$\int_{-1}^s \left(-\int_{-1}^x \frac{(1+t)dt}{2p(t)} + B_2 + \int_{-1}^s \frac{dt}{p(t)} \right) dx + \int_{-1}^s \left(\int_{-1}^s \frac{(1-t)dt}{2p(t)} + B_2 \right) dx = 0$$

$$-\int_{-1}^s \frac{(1+t)(s-x)dt}{2p(t)} + B_2(s+1) + \int_{-1}^s \frac{2(s+1)dt}{2p(t)} + \int_{-1}^s \frac{(1+t)(s-x)dt}{2p(t)} + B_2(1-s) = 0$$

$$2B_2 + \int_{-1}^s \frac{-(1+t)(s-x) + 2(s+1) + (1+t)(s-x)}{2p(t)} dx = 0$$

$$B_2 = -\int_{-1}^s \frac{(s+1)dt}{2p(t)}$$

$$A_2 = \int_{-1}^s \frac{(1-s)dt}{2p(t)}$$

$$G(x, t) = \begin{cases} -\int_{-1}^s \frac{(1+t)dt}{2p(t)} + \int_{-1}^s \frac{(1-s)dt}{2p(t)} \\ -\int_{-1}^x \frac{(1-t)dt}{2p(t)} - \int_{-1}^s \frac{(s+1)dt}{2p(t)} \end{cases}$$

yoki,

$$G(x, t) = \begin{cases} -\int_{-1}^x \frac{(1+x)dx}{2p(x)} + \int_{-1}^s \frac{(1-s)dx}{2p(x)} \\ -\int_{-1}^s \frac{(1+s)dx}{2p(x)} + \int_{-1}^x \frac{(1-x)dx}{2p(x)} \end{cases}$$

ko'rinishida yozish mumkin.

Gilbert teoremasiga ko'ra $\{(3), (7)\}$ masalaning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$y(x) = \int_{-1}^s \left(-\int_{-1}^s \frac{(1+s)dx}{2p(x)} + \int_{-1}^x \frac{(1-x)dx}{2p(x)} \right) + (s)ds + \int_s^1 \left(-\int_{-1}^x \frac{(1+x)dx}{2p(x)} + \int_{-1}^s \frac{(1-s)dx}{2p(x)} \right) f(s)ds$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Timoshenko, S.P., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, 1970.

2. Love, A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press, 1944.
3. Chandrasekhar S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover Publications, 1981.
4. Eckhaus W., *Matched Asymptotic Expansions and Singular Perturbations*, North-Holland Publishing Company, 1973.
5. Азизов М.С. О разрешимости нелокальной начально-граничной задачи для дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя // Scientific bulletin. Physical and Mathematical Research, 2022, №1, pp. 95-103.
6. Уринов А.К. Азизов М.С. О разрешимости нелокальных начально-граничных задач для одного дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2022, т. 32, вып. 2, с. 240-255.
7. Уринов А.К. Азизов М.С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022, том 26, номер 2, 273–292.
8. Уринов А.К. Азизов М.С. Об одной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике // Научный вестник ФерГУ 2022. №2. –С. 207-224.
9. Азизов М.С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя в прямоугольнике // Научный вестник НамГУ 2022. № 10. –С. 3-11.
10. Азизов М.С. Об одной нелокальной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике // Бюллетень Института математики 2022, Vol. 5, №5, с. 112-133.
11. Уринов А.К. Азизов М.С. О разрешимости начально-граничной задачи для уравнения высокого чётного порядка, вырождающегося на границе области // Сибирский журнал индустриальной математики. 2023. Т. 26. № 2. –С. 155–170.

12. Urinov A.K., Azizov M.S. On the solvability of an initial–boundary value problem for a high even order partial differential equation degenerating on the domain boundary // Journal of Applied and Industrial Mathematics.
13. Urinov A.K., Azizov M.S. Initial-Boundary Value Problem for a Degenerate High Even-Order Partial Differential Equation with the Bessel Operator // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 2, pp. 864–874.
14. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. Тошкент: Мумтоз сўз. 2014.