

SHTURM-LIUUVILL MASALASI

Azizov Muzaffar Sulaymonovich

FarDU, matematik analiz va differensial tenglamalar

kafedrası katta o'qituvchisi

Vahobjonova Madina Xomidjon qizi

Yusubjonova Madinabonu Dilshod qizi

FarDU, Matematika yo'nalishi 3- bosqich talabalari

Annotatsiya. Ushbu maqolada Fredgolm integral tenglamasi uchun chegaraviy masala bayon qilingan va bu masala yechimi Grin funksiyalar usulida topilgan.

Kalit so'zlar. chegaraviy masala, Grin funksiya, Gilbert teoremasi, Fredgolm integral tenglamasi .

Kirish

Shturm–Liu vill masalalari matematik fizika, kvant mexanikasi, tebranishlar va to'liqlar nazariyasi kabi sohalarda uchraydigan fundamental masalalardan biridir. Ushbu masalalar ko'pincha ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar va ularga qo'yiladigan chegaraviy shartlar orqali ifodalanadi. Shturm–Liu vill operatorining spektral xususiyatlari – ya'ni o'z qiymatlari va o'z funksiyalari – tizimlarning tabiiy chastotalari va normal rejimlarini tahlil qilishda asosiy rol o'ynaydi.

Maqsadimiz ushbu chegaraviy masalani Fredgolm integral tenglamasiga keltirib, yechimni Grin funksiyasi yordamida izohlash va uni topish usullarini tahlil qilishdan iborat. Grin funksiyasi yordamida chegaraviy masala yechimini integral ko'rinishda ifodalash mumkin, bu esa nazariy tahlilni soddalashtirish bilan birga amaliy hisoblashlar uchun qulay vosita bo'lib xizmat qiladi. Tadqiqot davomida Gilbert fazolari va tegishli teoremalardan, xususan Fredgolim teoremasidan foydalanamiz.

Ushbu maqolada Shturm–Liuvill masalasini Grin funksiyasi usuli orqali yechishga qaratilgan izohli tahlil keltiriladi, bu esa o‘quvchilarga va tadqiqotchilarga mavzuni chuqurroq o‘zlashtirishda yordam beradi

Bizga quyidagi masala berilgan bo‘lsin.

$$L[y] = (p(x)y'(x))' + \lambda q(x)y(x) = 0 \quad (1)$$

$$p(-1) = 0, p(1) = 0 \quad (2) \quad p(x) = p_0(x-1)^\alpha(x+1)^\alpha, \quad \alpha \in (0,1).$$

λ parametrning ma’lum qiymatlarida shunday $y(x)$ tenglama topilsinki u (1) tenglamani qanoatlantirsin va (2) shartlarni bajarsin.

Bu yerda $p(x)$ va $q(x)$ -berilgan malum funksiyalar. $p(x) > 0$, $q(x) > 0$, $x \in [-1,1]$ va λ -sonli parametr.

Odatda $\{(1),(2)\}$ masalani Shturm-Liuvill masalasi yoki boshqacha Spektral masala deb ham ataladi. Avvalo $\{(1),(2)\}$ masala λ parametrning qanday qiymatlarida yechimga ega ekanligini tekshiramiz. Buning uchun (1) tenglamani

$$(p(x)y'(x))' = -\lambda q(x)y(x)$$

Ko‘rinishda yozib olamiz va uning har ikki tomonini $y(x)$ ga ko‘paytirib $x \in [-1,1]$ kesma bo‘yicha integrallaymiz.

$$\int_{-1}^1 [(p(x)y'(x))' y(x)] dx = -\lambda \int_{-1}^1 q(x)y^2(x) dx \text{ bundan}$$

$$\int_{-1}^1 p(x)(y'(x))^2 dx = \lambda \int_{-1}^1 q(x)y^2(x) dx \quad (3)$$

hosil bo‘ladi.

(3) tenglikdan ko‘rinadiki $\lambda \geq 0$

1. $\lambda = 0$ bo'lsin.

U holda (1) tenglama

$$(p(x)y'(x))' = 0$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$p(x)y'(x) = C_1$$

$$y'(x) = \frac{C_1}{p(x)}$$

$$y(x) = C_1 \int_{-1}^x \frac{dt}{p(t)} + C_2$$

ko'rinishda aniqlanadi. Bu umumiy yechimni (2) shartga bo'ysundirib

$$y(-1) = C_1 \int_{-1}^x \frac{dt}{p(t)} + C_2 = 0, \quad C_2 = 0$$

$$y(1) = C_1 \int_x^1 \frac{dt}{p(t)} = 0, \quad C_1 = 0$$

Bundan esa $\lambda = 0$ bo'lganda

$$y(x) = 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Bundan xulosa qilamizki, $\{(1), (2)\}$ masala $\lambda > 0$ bo'lgandagina noldan farqli $y(x)$ funksiya mavjud bo'ladi.

2. $\lambda > 0$ bo'lsin.

$$(p(x)y'(x))' = -\lambda q(x)y(x) = f(x) \quad (4)$$

tenglamani va (2) shartlarni qaraymiz.

$$(p(x)y'(x))' = -\lambda q(x)y(x) = f(x) \quad (4)$$

$$y(-1) = 0, y(1) = 0 \quad (2)$$

{(4),(2)} masala uchun Grin funksiyasini tuzamiz.

$$G(x,s) = \begin{cases} A_1 \int_{-1}^x \frac{dt}{p(t)} + A_2 \\ B_1 \int_x^1 \frac{dt}{p(t)} + B_2 \end{cases} \quad (5)$$

ko'rinishida izlaymiz.

Chegaraviy shartlarga ko'ra $A_2 = 0, B_2 = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Buni hisobga olsak Grin funksiyasi

$$G(x,s) = \begin{cases} A_1 \int_{-1}^x \frac{dt}{p(t)} \\ B_1 \int_x^1 \frac{dt}{p(t)} \end{cases} \quad (6)$$

ko'rinishga keladi. Grin funksiyasi uchun (1),(3) shartlarga asosan $x = s$ bo'lganda

$$\begin{cases} A_1 \int_{-1}^s \frac{dt}{p(t)} = B_1 \int_s^1 \frac{dt}{p(t)} \\ \frac{B_1}{p(s)} + \frac{A_1}{p(s)} = \frac{1}{p(s)} \end{cases}$$

algebraik tenglamalarni sistemasiga ega bo'lamiz. Bu sistemani yechib, quyidagilarni topamiz.

$$A_1 = \frac{\int_s^1 \frac{dt}{p(t)}}{\int_{-1}^1 \frac{dt}{p(t)}}, \quad B_1 = \frac{\int_{-1}^s \frac{dt}{p(t)}}{\int_{-1}^1 \frac{dt}{p(t)}}$$

Topganlarimizni (6) ga qo'yib masalaning Grin funksiyasini quyidagi ko'rinishda topamiz.

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{\int_s^1 \frac{dt}{p(t)}}{\int_{-1}^1 \frac{dt}{p(t)}} \int_{-1}^x \frac{dt}{p(t)} & -1 \leq x \leq s \\ \frac{\int_{-1}^s \frac{dt}{p(t)}}{\int_{-1}^1 \frac{dt}{p(t)}} \int_x^1 \frac{dt}{p(t)} & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Gilbert teoremasiga ko'ra masalaning yechimi

$$y(x) = -\lambda \int_{-1}^1 G(x, s) q(s) y(s) ds$$

$$\sqrt{q(x)} y(x) = -\lambda \int_{-1}^1 \sqrt{q(x) q(s)} G(x, s) \sqrt{q(s)} y(s) ds$$

$$z(x) = \sqrt{q(x)} y(x), K(x, s) = G(x, s) \sqrt{q(x) q(s)}$$

$$\mu = -\lambda$$

$$z(x) = \mu \int_{-1}^1 K(x, s) z(s) ds \quad (7)$$

(7) simmetrik yadroli Fredholm integral tenglamasi deyiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Timoshenko, S.P., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, 1970.
2. Love, A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press, 1944.
3. Chandrasekhar S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover Publications, 1981.

4. Eckhaus W., *Matched Asymptotic Expansions and Singular Perturbations*, North-Holland Publishing Company, 1973.
5. Азизов М.С. О разрешимости нелокальной начально-граничной задачи для дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя // Scientific bulletin. Physical and Mathematical Research, 2022, №1, pp. 95-103.
6. Уринов А.К. Азизов М.С. О разрешимости нелокальных начально-граничных задач для одного дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2022, т. 32, вып. 2, с. 240-255.
7. Уринов А.К. Азизов М.С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022, том 26, номер 2, 273–292.
8. Уринов А.К. Азизов М.С. Об одной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике // Научный вестник ФерГУ 2022. №2. –С. 207-224.
9. Азизов М.С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя в прямоугольнике // Научный вестник НамГУ 2022. № 10. –С. 3-11.
10. Азизов М.С. Об одной нелокальной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике // Бюллетень Института математики 2022, Vol. 5, №5, с. 112-133.
11. Уринов А.К. Азизов М.С. О разрешимости начально-граничной задачи для уравнения высокого чётного порядка, вырождающегося на границе области // Сибирский журнал индустриальной математики. 2023. Т. 26. № 2. –С. 155–170.
12. Urinov A.K., Azizov M.S. On the solvability of an initial–boundary value problem for a high even order partial differential equation degenerating on the domain boundary // Journal of Applied and Industrial Mathematics.

13. Urinov A.K., Azizov M.S. Initial-Boundary Value Problem for a Degenerate High Even-Order Partial Differential Equation with the Bessel Operator // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 2, pp. 864–874.
14. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. Тошкент: Мумтоз сўз. 2014.