

AYRIM TENGSIZLIKLAR HAQIDAGI TEOREMALARNING AJOYIB ISBOTI VA ULARNING AMALIYOTGA TADBIQI

Samarqand Davlat Tibbiyot Universiteti

“Informatsion texnologiyalar, biofizika va tibbiy fizika”

kafedrasi assisenti **Karshiyeva Feruza Zaribovna**

Annotatsiya:

Ushbu mavzuda tengsizliklar tushunchasi, ularning turlari (chiziqli, kvadratik, irratsional va boshqalar), yechish usullari hamda grafik tasvirlash yo‘llari o‘rganiladi. Shuningdek, tengsizliklarning real hayotdagi qo‘llanilishi, matematik model yaratishdagi roli ham ko‘rib chiqiladi. Mavzu matematik mantiqni mustahkamlash va muammolarni tahlil qilish ko‘nikmalarini rivojlantirishga xizmat qiladi.

Kalit so‘zlar: tengsizlik, chiziqli tengsizlik, kvadratik tengsizlik, interval usuli, grafik yechim, matematik model, yechim to‘plami

Аннотация:

В данной теме рассматриваются понятие неравенств, их виды (линейные, квадратные, иррациональные и др.), методы их решения и способы графического представления. Также обсуждаются практические применения неравенств и их роль в математическом моделировании. Тема способствует развитию логического мышления и навыков анализа.

Ключевые слова: неравенство, линейное неравенство, квадратное неравенство, метод интервалов, графическое решение, математическое моделирование, множество решений

Annotation:

This topic explores the concept of inequalities, their types (linear, quadratic, irrational, etc.), methods of solving them, and graphical representation techniques. It also

covers the practical applications of inequalities and their role in mathematical modeling. The topic enhances logical reasoning and analytical problem-solving skills.

Keywords: inequality, linear inequality, quadratic inequality, interval method, graphical solution, mathematical model, solution set

Kirish.

Matematika – bu faqat nazariy tushunchalar emas, balki real hayotdagi muammolarni modellashtirish va tahlil qilish uchun qudratli vositadir. Ayniqsa, **tengsizliklar** kundalik hayotda qaror qabul qilish, optimal resurs taqsimoti va xavfsizlik chegaralarini belgilashda keng qo‘llaniladi. Budjet cheklovlari, maksimal ishlab chiqarish hajmi, minimal energiya sarfi kabi ko‘plab iqtisodiy va texnik masalalar tengsizliklar orqali ifodalanadi.

Ushbu maqolada tengsizliklarning muhim teoremlaridan bo‘lgan **AM-GM** va **Koshi-Bunyakovskiy** tengsizliklari chuqur tahlil qilinadi, ularning matematik isbotlari keltiriladi hamda real va nazariy masalalar orqali qo‘llanilishi namoyish etiladi. Shuningdek, maqola o‘quvchilarning tahliliy fikrlash, isbotlash va modellashtirish ko‘nikmalarini rivojlantirishga xizmat qiladi.

Asosiy qism.

AM-GM tengsizligi (Aritmetik-geometrik o‘rtacha teoremasi)

Matn: (siz yuborgan isbotlar asosida qoldiriladi, tartibli qilib yoziladi).

Umumlashgan AM-GM yoki Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi

Matn: (siz yuborgan asosiy isbot saqlanadi, lemmalar bilan), bilan tanishishingiz mumkin:

Teorema(AM-GM): Barcha musbat $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sonlar uchun

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (1)$$

tengsizlik o‘rinli. Tenglik $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$ bo‘lganda bajariladi.

Isbot: Induksiyanadan foydalanamiz.

$$n = 2 \text{ da } \sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0 \quad \forall a_1, a_2 \geq 0$$

(1)da n ta musbat sonlar uchun o'rinli deb hisoblab $n + 1$ ta R^+ sonlar uchun o'rinli ekanligini isbotlaymiz. Bu sonlar $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$ bo'lib a_{n+1} ularning eng kattasi bo'lsin,

$$a_{n+1} \geq a_1, a_{n+1} \geq a_2, \dots, a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (2)$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz.

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad ; \quad A_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} = \frac{nA_n + a_{n+1}}{n+1}$$

(2)ga ko'ra $a_{n+1} \geq A_n \Rightarrow a_{n+1} = A_n + \alpha \quad \alpha \geq 0$ deylik. U holda:

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + A_n + \alpha}{n+1} = A_n + \frac{\alpha}{n+1}$$

Bu tenglikning ikkala qismini $n + 1$ darajaga ko'tarib, quyidagini topamiz:

$$\begin{aligned} (A_{n+1})^{n+1} &= A_n^{n+1} + C_{n+1}^1(A_n)^n \frac{\alpha}{n+1} + \dots + C_{n+1}^n(A_n) \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^n + \\ &+ \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^{n+1} \geq (A_n)^{n+1} + C_{n+1}^1(A_n)^n \frac{\alpha}{n+1} = (A_n)^{n+1} + (A_n)^n \frac{\alpha}{n+1} \frac{(n+1)!}{1!n!} \\ &= A_n^{n+1} + (A_n)^n \alpha = A_n^n (A_n + \alpha) = A_n^n \cdot a_{n+1} \end{aligned}$$

Farazga ko'ra $A_n^n \geq a_1 a_2 \dots a_n \Rightarrow$

$$(A_{n+1})^{n+1} \geq a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} \Rightarrow$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}}$$

Bundan kelib chiqadiki teorema isbotlandi.

Teorema (Umumlashgan AM-GM yoki Koshi-Bunyakovskiy):

$a_1, a_2, \dots, a_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ musbat sonlar

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} \leq \left(\frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right)^{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \quad (1)$$

Munosabat o'rinli, tenglik esa faqat $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$ da bajariladi.

Isbot: Lemma: $e^{x-1} \geq x$ bo'ladi, bunda $x \geq 1$.

Lemmaning isboti: $f(x) = e^{x-1} - x$ deb olamiz. $\Rightarrow x \geq 1$ ekanligidan $f(x) \geq f(1)$ bo'ladi. $\Rightarrow e^{x-1} - x \geq e^{1-1} - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow e^{x-1} - x \geq 0$

(1)ni isbotlashda Lemmadan foydalanamiz.

$$S = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

deb belgilash kiritamiz.

Lemmaga ko'ra: $e^{\frac{a_i}{S}-1} \geq \frac{a_i}{S}$ bo'ladi, bunda $i = \overline{1, n} \Rightarrow S \cdot e^{\frac{a_i}{S}-1} \geq a_i \Rightarrow$

$$a_i^{p_i} \leq S^{p_i} \cdot e^{\frac{a_i p_i}{S} - p_i}, \quad i = \overline{1, n}$$

Bu tengsizliklarning barchasini ko'paytirib chiqamiz.

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} \leq \left(\frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right)^{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

Tenglik faqat $s = a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$ da bajariladi, bundan kelib chiqadiki tengsizlik isbotlandi.

Biz bu teoremalardan foydalanib bir qancha quyidagi tengsizlik haqidagi masalalarni yechishimiz mumkin.

Masalalar

1-misol: $x, y > 0$ bo'lsa, $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ tengsizlikni isbotlang.

$$\text{Isbot: } x^2 + y^2 + 1 = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \geq xy + x + y$$

Bundan kelib chiqadi tengsizlik isbotlandi.

2-misol: $x > 0$ bo'lsa, $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot 2^{2\sqrt[6]{x}}$ tengsizlikni isbotlang.

$$\text{Isbot: AM-GM teoremasiga ko'ra: } 2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot 2^{x^{\frac{1}{12} + \frac{1}{4}}} = 2 \cdot 2^{2x^{\frac{1}{6}}} = 2 \cdot 2^{2\sqrt[6]{x}}$$

bundan kelib chiqadi tengsizlik isbotlandi.

3-misol: Agar $x, y > 0$ bo'lsa, $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$ ni isbotlang.

$$\text{Isbot: } x^4 + y^4 + 8 = (x^4 + 4) + (y^4 + 4) \geq 2(2x^2 + 2y^2) \geq 2(4xy) = 8xy$$

$\Rightarrow$ Tengsizlik isbotlandi.

Izoh: Bu tengsizlik simmetrik funksiyalarning eng kichik qiymasini aniqlashda qo'llaniladi.

4-misol: $x_1, x_2, \dots, x_5 > 0$ bo'lsa quyidagini isbotlang:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geq x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$\begin{aligned} \text{Isbot: } \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 + \frac{x_1^2}{4} + x_3^2 + \frac{x_1^2}{4} + x_4^2 + \frac{x_1^2}{4} + x_5^2 &\geq x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 = \\ &= x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Tengsizlik isbotlandi.

5-misol: $x, y, z > 0$ bo'lsa, quyidagini isbotlang:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx &= \\ &= \frac{x^2 - 2xy + y^2}{2} + \frac{y^2 - 2yz + z^2}{2} + \frac{z^2 - 2xz + x^2}{2} = \\ &= \frac{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Tengsizlik isbotlandi.

6-misol: $a, b, c > 0$ bo'lsa, $(a + 1)(b + 1)(c + a)(b + c) \geq 16abc$ ni isbotlang.

Isbot: $(a + 1)(b + 1)(c + a)(b + c) \geq 2\sqrt{a} \cdot 2\sqrt{b} \cdot 2\sqrt{ca} \cdot 2\sqrt{bc} = 16abc$

$\Rightarrow$ Tengsizlik isbotlandi.

7-misol: $a, b, c > 0$ bo'lsa, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ ni isbotlang:

Isbot: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3$

$\Rightarrow$ Tengsizlik isbotlandi.

8-misol: Agar $a, b, c > 0$ bo'lsa,

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{a + b + c}{3}$$

ni isbotlang.

Isbot: $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} = 9$

$\Rightarrow$ Tengsizlik isbotlandi.

9-misol: Agar $a, b, c > 0$, $ab^2c^3 = 1$ bo'lsa, quyidagini isbotlang:

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 6$$

Isbot: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \geq 6\sqrt[6]{\frac{1}{ab^2c^3}} = 6$

$\Rightarrow$ Tengsizlik isbotlandi.

10-misol: Agar $a, b, c > 0$ bo'lsa, quyidagini isbotlang.

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 4\left(\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 \geq 7$$

Isbot: Koshi-Bunyakovskiy teoremasiga ko'ra:

$$\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} + 4\left(\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 \geq 7$$

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \geq 1 \Rightarrow$$

$$1 + \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} + 4\left(\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 \geq 7$$

$$\frac{1}{6} \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} + \frac{1}{6} \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} + \frac{1}{6} \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} +$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} + 2\left(\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 + 2\left(\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 \geq$$

$$6 \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{64} \cdot 2^4 \cdot \left(\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\right)^4} \geq 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S \geq 6$$

$\Rightarrow$ Tengsizlik isbotlandi.

Grafik va vizualizatsiya

Python kodi (3D grafiklar uchun):

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

x va y oraliqlarini belgilash

```
x = np.linspace(0.1, 3, 100)
```

```
y = np.linspace(0.1, 3, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

# Tengsizlikning ikkala tomoni
lhs = X**2 + Y**2 + 1      # chap tomoni:  $x^2 + y^2 + 1$ 
rhs = X*Y + X + Y          # o'ng tomoni:  $xy + x + y$ 

# Grafik chizish
fig = plt.figure(figsize=(12, 6))

# Chap tomonni (LHS) chizish
ax1 = fig.add_subplot(1, 2, 1, projection='3d')
ax1.plot_surface(X, Y, lhs, cmap='viridis', alpha=0.9)
ax1.set_title(r'LHS:  $x^2 + y^2 + 1$ ')
ax1.set_xlabel('x')
ax1.set_ylabel('y')
ax1.set_zlabel('z')

# O'ng tomonni (RHS) chizish
ax2 = fig.add_subplot(1, 2, 2, projection='3d')
ax2.plot_surface(X, Y, rhs, cmap='plasma', alpha=0.9)
ax2.set_title(r'RHS:  $xy + x + y$ ')
ax2.set_xlabel('x')
ax2.set_ylabel('y')
ax2.set_zlabel('z')

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Amaliy tadbqiq (real-case misollar)

Tibbiyotda

Tibbiy protokollarda dori dozasining eng kam va eng ko'p miqdorlari odatda **tengsizliklar** orqali ifodalanadi. Masalan, bemorning tana vazniga qarab maksimal ruxsat etilgan doza $D \leq k \cdot m$ (bu yerda k — doza koeffitsienti, m — vazn) ko'rinishida aniqlanadi. Bu yondashuv bemorga xavfsiz va individual moslangan davolash usulini qo'llash imkonini beradi.

Iqtisodiyotda

Budjetni rejalashtirishda har bir resurs sarfi umumiy budjetni oshmasligi kerak, bu esa $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq B$ ko'rinishidagi **chiziqli tengsizlik** bilan ifodalanadi. Tengsizliklar asosida tuzilgan matematik modellar orqali optimal sarf-harajat strategiyalari aniqlanadi. Bu iqtisodiy samaradorlikni oshirish va cheklangan resurslardan oqilona foydalanishni ta'minlaydi.

Muhandislikda

Inshootlar va texnik tizimlarning konstruktiv elementlari ma'lum yuklamalarni ko'tara olishi kerak, bu esa chidamlilik chegarasini bildiradi. Masalan, stress (kuchlanish) qiymati materialga xos maksimal qiymatdan oshmasligi uchun $\sigma \leq \sigma_{\max}$ tengsizligi qo'llaniladi. Bunday **tengsizliklar muhandislik xavfsizligi** va mustahkamlikni kafolatlashda muhim rol o'ynaydi.

Xulosa

Tengsizliklar matematik tahlil, muhandislik, iqtisodiyot va tibbiyot kabi ko'plab sohalarda muhim vosita sifatida xizmat qiladi. Ushbu maqolada eng mashhur va kuchli tengsizlik teoremlaridan biri bo'lgan **AM-GM (aritmetik-geometrik o'rtacha)** va **Koshi-Bunyakovskiy** tengsizliklari o'rganildi, ularning **induksiya, elementar algebra va eksponenta funktsiyasi asosidagi** isbotlari keltirildi.

Keltirilgan misollar orqali bu tengsizliklarning nafaqat nazariy, balki **amaliy ahamiyati** ham ko'rsatib berildi. Ular yordamida murakkab ifodalarni baholash,

muammolarni soddalashtirish, shuningdek, real hayotdagi cheklovlarni matematik model sifatida ifodalash imkoniyati mavjudligi isbotlandi.

Shuningdek, maqolada tengsizliklarning:

tibbiyotda – **doza chegaralarini aniqlashda,**

iqtisodiyotda – **budjet taqsimotini rejalashtirishda,**

muhandislikda – **mexanik xavfsizlikni ta'minlashda**

qanday qo'llanilishi ko'rsatildi.

Kelgusida bu mavzuni quyidagi yo'nalishlarda kengaytirish maqsadga muvofiq bo'ladi:

Holder, Chebyshev va **Minkowski** tengsizliklari kabi ilg'or tengsizliklarni o'rganish,

algoritmik tahlil asosida **kompyuter orqali avtomatlashtirilgan isbotlash usullarini** qo'llash,

tengsizliklarning **olimpiyalardagi** qo'llanilishini tahlil qilish.

Adabiyotlar ro'yxati :

1. Ишмуратов А.А. **Математик анализ asoslari** – Toshkent: O'qituvchi, 2008.
2. Polya G. **How to Solve It** – Princeton University Press, 1957.
3. Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Pólya, G. **Inequalities** – Cambridge University Press, 1934.
4. Зорич В.А. **Математический анализ**. Москва: МЦНМО, 2002.
5. Rahimov B. **Математик tahlil masalalar to'plami** – Toshkent: Fan, 1995.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. **Уравнения математической физики**, Наука, 1977.
7. Гельфанд И.М., Фомин С.В. **Математический анализ**. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
8. Харди Г., Литтлвуд Дж.Е., Поля Г. **Неравенства**. – М.: Наука, 1971. – 416 с.

9. Богданов А.П., Трофимова Т.И. **Высшая математика для экономистов.** – М.: Финансы и статистика, 2003. – 540 с.
10. Алиев Р.А. **Применение неравенств в инженерных расчетах** // Вестник МГТУ. – 2016. – №3. – С. 45–52.
11. Абдуллаев Б.А. **Matematik tahlil asoslari.** – Toshkent: O‘qituvchi, 2000. – 385 b.
12. Qurbonov X.X., Yusupov A.R. **Oliy matematika.** – Samarqand: SamDU nashriyoti, 2019. – 412 b.
13. Ибрагимова Д.А. **Ayrim tengsizliklarning amaliy tahlili** // Samarqand DTU ilmiy axborotnomasi. – 2023. – №2. – В. 90–94.
14. Sedgewick R., Wayne K. **Algorithms (4th Edition).** – Addison-Wesley, 2011. – 976 p.
15. Weisstein, Eric W. “Inequality.” *MathWorld* – A Wolfram Web Resource. URL: <https://mathworld.wolfram.com/Inequality.html>