CHEGARADA BUZILADIGAN YUQORI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALA

Azizov Muzaffar Sulaymonovich
FarDU, matematik analiz va differensial tenglamalar kafedrasi katta oʻqituvchisi;
Uraimova Sehriyora Gʻulomjon qizi
FarDU, Matematika yoʻnalishi 3-bosqich talabasi

Annotatsiya. Ushbu maqolada kesmaning ikki chetida buziladigan toʻrtinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masalalar bayon qilingan va bu masala yechimi Grin funksiyalar usuli bilan topilgan.

Kalit soʻzlar:buziladigan tenglama, chegaraviy masala, Grin funksiya, Gilbert teoremasi.

Kirish

Hozirgi kunda differensial tenglamalar tabiiy va texnik fanlarda keng qoʻllaniladigan vositalaridan biri boʻlib, ko’plab fizik, biologik va texnologik jarayonlarning matematik modellarini qurishda muhim ahamiyatga ega. Xususan, elastiklik nazariyasi [1], balka va plastinka masalalari [2], issiqlik o’tkazuvchanlik va turli xil texnologik jarayonlar to’rtinchi tartibli buziladigan oddiy differensial tenglamalarni tavsiflashda koʻplab uchraydi [3].

Buziladigan differensial tenglamalarni oʻrganish va yechish bir qancha qiyinchiliklar va murakkabliklarni keltirib chiqaradi: aniq yechimlarni topishning murakkabligi, raqamli usullar barqarorligining zaifligi va chegaraviy shartlarga mos keluvchi yechimlarning mavjudlik shartlarini aniqlash zarurati [4-13].

Shu boisdan ham, buziladigan oddiy differensial tenglamalar uchun yangi usullarni ishlab chiqish va amaliy masalalarga qoʻllash bugungi kunda dolzarb masalalardan biri bo’lib qolmoqda. Ushbu maqolada, buzish parametriga ega boʻlgaan toʻrtinchi tartibli differensial tenglamalarning chegaraviy masalalari nazariy asoslari tahlil qilinadi, yechim usullari taklif etiladi va ularning samaradorligi ko'rsatkichlari baholanadi.

Bizga quyidagi

$$L[y]=(-1)^n\left(p(x)y^{(n)}(x)\right)^{(n)}=f(x),\ \ x\in(0;1) \tag{1}$$

oddiy differensial tenglama berilgan bo'lsin, bu yerda n-berilgan natural son, $p(x)$ va $f(x)$ lar esa $[0;1]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz funksiyalar bo'lib, $p(0)=0,\ 0<x<1$ da esa $p(x)\geq p_0x^{\alpha}$ tengsizlik o'rinli, bunda $p_0=const>0,\ 0<x\leq 1$ da esa $p(x)\geq p_0x^{\alpha}$ tengsizlik o'rinli, bunda $p_0=const>0,\ \ 0<\alpha<2n$.

Bu tenglama uchun chegaraviy shartlar α ning qiymatiga qarab turlicha qo'yiladi. Chegaraviy shartlar, masalan,

$0<\alpha<n$ bo'lganda

$$y^{(j)}(0)=0,\quad j=\overline{0,n-[\alpha]-1};$$

$$\left|y^{(k)}(0)\right|<+\infty,\quad j=\overline{n-[\alpha],n-1}; \tag{2}$$

$$y^{(m)}(1)=0,\quad m=\overline{0,n-1}$$

ko'rinishda, $n<\alpha<2n$ bo'lganda esa

$$|y^{(j)}(0)|<+\infty,\quad j=\overline{0,(n-1)+(n-[\alpha])}; \tag{3}$$

$$y^{(m)}(1)=0,\quad m=\overline{0,n-1}$$

ko'rinishda qo'yilishi mumkin.

Agar (1) tenglama uchun (2) yoki (3) shartlar bilan qo'yilgan chegaraviy masalaning yechimi

$$y(x)=\int_0^1 G(x,s)f(s)ds \tag{4}$$

formula bilan aniqlansa, u holda $G(x,t)$ funksiya o'sha masalaning Grin funksiyasi deyiladi.

$n=2$ *va* $2<\alpha<4$ deb faraz qilib quyidagi chegaraviy masalani quraylik.

Masala: Ushbu $L[y]=\left(p(x)y''\right)''=f(x),\ \ x\in(0,1)$ (5)

differensial operatorning

$$y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(1)=0,\ y'''(1)=0 \qquad (6)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi Grin funksiyasini tuzing.

Yechish. $L[y]=0$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz

$$\left(p(x)y''(x)\right)''=0$$

$$\left(p(x)y''(x)\right)'=C_1$$

$p(x)y''(x)=C_1x+C_2$ bu tenglikdan $y''(x)=\dfrac{c_1x+c_2}{p(x)}$ ekanligi kelib chiqadi.

$$y'(x)=C_1\int_0^x\frac{tdt}{p(t)}+C_2\int_0^x\frac{dt}{p(t)}+C_3$$

$$y(x)=C_1\int_0^x\left[\int_0^t\frac{z}{p(z)}dz\right]dt+C_2\int_0^x\left[\int_0^t\frac{dz}{p(z)}\right]dt+C_3x+C_4$$

$$y(x)=C_1\int_0^x\frac{z}{p(z)}dz\int_z^x dt+C_2\int_0^x\frac{dz}{p(z)}\int_z^x dt+C_3x+C_4$$

Demak,

$$y(x)=C_1\int_0^x\frac{z(x-z)}{p(z)}dz+C_2\int_0^x\frac{(x-z)}{p(z)}dz+C_3x+C_4 \qquad (7)$$

umumiy yechimni $y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(1)=0,\ y'''(1)=0$ chegaraviy shartlarga bo‘ysundirsak, $C_1=C_2=C_3=C_4=0$ larga ega bo‘lamiz. Demak, chegaraviy shartlarni faqat trivial yechim, ya’ni $y(x)\equiv 0$ funksiya qanoatlantiradi. Shuning uchun oddiy Grin funksiyasini quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$G(x,s)=\begin{cases} a_1\displaystyle\int_0^x\frac{z(x-z)}{p(z)}dz+a_2\int_0^x\frac{(x-z)}{p(z)}dz+a_3x+a_4, & x<s\\ b_1\displaystyle\int_0^x\frac{z(x-z)}{p(z)}dz+b_2\int_0^x\frac{(x-z)}{p(z)}dz+b_3x+b_4, & x>s\end{cases} \qquad (8)$$

Chegaraviy shartlarga ko‘ra $a_3=0,\ a_4=0,\ b_1=0,\ b_2=0$ ekanligi kelib chiqadi. Buni hisobga olsak, Grin funksiyasi

$$G(x,s)=\begin{cases} a_1\int_0^x \frac{z(x-z)}{p(z)}dz+a_2\int_0^x \frac{(x-z)}{p(z)}dz, & x<s \\ b_3x+b_4, & x>s \end{cases}$$

ko’rinishga keladi.Grin funksiyasi uchun birinchi va uchinchi shartlarga asosan $x=s$ bo’lganda

$$\begin{cases} b_3+b_4=a_1\int_0^s \frac{z(s-z)}{p(z)}dz+a_2\int_0^s \frac{(s-z)}{p(z)}dz \\ b_3=a_1\int_0^s \frac{z}{p(z)}dz+a_2\int_0^s \frac{1}{p(z)}dz \\ p(s)\cdot 0=p(s)\cdot\left(a_1\frac{s}{p(s)}+a_2\frac{1}{p(s)}\right) \\ -a_1=1 \end{cases}$$

algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz. Bu sistemani yechib, quyidagilarni topamiz:

$$a_1=-1,\ a_2=s,\ b_3=s\int_0^s \frac{s-z}{p(z)}dz,\ b_4=\int_0^s \frac{z(z-s)}{p(z)}dz$$

Topilganlarni (8) ga qo‘yib (5)-masalaning Grin funksiyasini quyidagi ko’rinishda topamiz:

$$G(x,s)=\begin{cases} \int_0^x \frac{z(z-x)}{p(z)}dz+\int_0^x \frac{s(x-z)}{p(z)}dz, & x<s \\ \int_0^z \frac{z(z-s)}{p(z)}dz+\int_0^s \frac{x(s-z)}{p(z)}dz, & x>s \end{cases}$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Timoshenko, S.P., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, 1970.

2. Love, A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press, 1944.

3. Chandrasekhar S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover Publications, 1981.

4. Eckhaus W., *Matched Asymptotic Expansions and Singular Perturbations*, North-Holland Publishing Company, 1973.

5. Азизов М.С. О разрешимости нелокальной начально-граничной задачи для дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя // Scientific bulletin. Physical and Mathematical Research, 2022, №1, pp. 95-103.

6. Уринов А.К. Азизов М.С. О разрешимости нелокальных начально-граничных задач для одного дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2022, т. 32, вып. 2, с. 240-255.

7. Уринов А.К. Азизов М.С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с
оператором Бесселя // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022, том 26, номер 2, 273–292.

8. Уринов А.К. Азизов М.С. Об одной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике // Научный вестник ФерГУ 2022. №2. –С. 207-224.

9. Азизов М.С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором бесселя в прямоугольнике // Научный вестник НамГУ 2022._№ 10. –С. 3-11.

10. Азизов М.С. Об одной нелокальной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике // Бюллетень Института математики 2022, Vol. 5, №5, с. 112-133.

11. Уринов А.К. Азизов М.С. О разрешимости начально-граничной задачи для уравнения высокого чётного порядка, вырождающегося на границе области // Сибирский журнал индустриальной математики. 2023. Т. 26. № 2. –С. 155–170.

12. Urinov A.K., Azizov M.S. On the solvability of an initial–boundary value problem for a high even order partial differential equation degenerating on the domain boundary // Journal of Applied and Industrial Mathematics.

13. Urinov A.K., Azizov M.S. Initial-Boundary Value Problem for a Degenerate High Even-Order Partial Differential Equation with the Bessel Operator // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 2, pp. 864–874.

14. Фринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. Тошкент: Мумтоз сўз. 2014