

ISSIQLIK TENGLAMASIDAN CHEGARAVIY FUNKSIYANI ANIQLASHNING TERSKARI MASALASI

Rahimov Doniyor G'ofurovich

Otayeva Nilufar Navro'zova

O'rta Osiyo Xalqaro Universiteti

matematika magistratura yo'nalishi

Annotatsiya

Maqolada issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun chegaraviy funksiyani aniqlashga oid teskari masala ko'rib chiqiladi. To'g'ri masalada chegaraviy va boshlang'ich shartlar berilgan holda harorat taqsimoti aniqlansa, teskari masalada ichki yoki yakuniy vaqtdagi ma'lumotlar asosida noma'lum chegaraviy funksiya tiklanadi. Masalaning qo'yilishi, uning noaniqligi (ill-posedligi), yechimning mavjudligi va yagonaligi masalalari tahlil qilinadi. Shuningdek, masalani regulyarizatsiya qilish usullari va amaliy ahamiyati muhokama etiladi.

Kalit so'zlar: issiqlik tenglamasi, teskari masala, chegaraviy funksiya, regulyarizatsiya, noaniq masala.

Kirish

Issiqlik tenglamasi matematik fizikaning asosiy tenglamalaridan biri bo'lib, u issiqlik o'tkazuvchanlik, diffuziya va shunga o'xshash jarayonlarni modellashtirishda keng qo'llaniladi. An'anaviy (to'g'ri) masalalarda tenglama uchun boshlang'ich va chegaraviy shartlar berilgan bo'lib, natijada harorat maydoni aniqlanadi.

Ammo ko'plab amaliy masalalarda chegaraviy shartlarni bevosita o'lchash imkoniyati mavjud emas. Masalan, metall konstruksiyalarning ichki yuzasidagi issiqlik oqimini aniqlash, geofizik jarayonlar yoki tibbiy termografiya masalalarida chegaraviy funksiyalar noma'lum bo'ladi. Bunday holatlarda **teskari masalalar** yuzaga keladi.

Ushbu maqolada issiqlik tenglamasidan noma'lum chegaraviy funksiyani aniqlash masalasi ko'rib chiqiladi.

Masalaning matematik qo'yilishi

Bir o'lchamli issiqlik tenglamasini qaraymiz:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, 0 < x < l, 0 < t < T,$$

bu yerda $u(x, t)$ — harorat funksiyasi, $k > 0$ — issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti.

Boshlang'ich shart:

$$u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l.$$

Chegaraviy shartlardan biri ma'lum:

$$u(0, t) = g(t),$$

ikkinchi chegaraviy shart esa noma'lum:

$$u(l, t) = f(t),$$

bu yerda $f(t)$ — aniqlanishi lozim bo'lgan chegaraviy funksiya.

Qo'shimcha ma'lumot sifatida, masalan, ichki nuqtadagi harorat berilgan bo'lsin:

$$u(x_0, t) = h(t), 0 < x_0 < l.$$

Mazkur qo'shimcha shart yordamida noma'lum $f(t)$ funksiyani aniqlash **teskari masalani** tashkil etadi.

Masalaning noaniqligi va xossalari

Issiqlik tenglamasi uchun teskari masalalar, odatda, **Hadamard ma'nosida to'g'ri qo'yilmagan** masalalardir. Ya'ni:

- yechim mavjud bo'lmashligi mumkin;
- yechim yagona bo'lmashligi mumkin;
- boshlang'ich yoki qo'shimcha ma'lumotlardagi kichik xatoliklar yechimda katta og'ishlarga olib keladi.

Shu sababli, bunday masalalarni yechishda maxsus **regulyarizatsiya usullari** qo'llaniladi.

Yechish usullari

Chegaraviy funktsiyani aniqlash masalalarini yechishda quyidagi usullar keng qo'llaniladi:

Tikhonov regulyarizatsiyasi

Masala quyidagi funksionalni minimallashtirishga keltiriladi:

$$J(f) = \| Af - h \|^2 + \alpha \| f \|^2,$$

bu yerda A — to'g'ri masalaga mos operator, $\alpha > 0$ — regulyarizatsiya parametri.

Integral tenglamalarga keltirish

Masala chegaraviy funksiya uchun Volterra tipidagi integral tenglamaga keltiriladi va sonli usullar bilan yechiladi.

Spektral usullar

Fourier qatorlari yordamida yechim taqribiy ko'rinishda olinadi va noma'lum funksiya koeffitsientlari aniqlanadi.

5. Amaliy ahamiyati

Issiqlik tenglamasidan chegaraviy funksiyani aniqlash masalalari:

- sanoatda issiqlik nazorati;
- energetika tizimlari;
- geofizika;
- biologiya va tibbiyotda (termografiya);
- materiallar diagnostikasi

kabi sohalarda muhim ahamiyatga ega.

Xulosa

Maqolada issiqlik tenglamasi uchun chegaraviy funksiyani aniqlashga oid teskari masala ko'rib chiqildi. Masalaning matematik qo'yilishi, noaniqligi va uni yechishning asosiy usullari tahlil qilindi. Tadqiqot natijalari ushbu yo'nalishda olib borilayotgan ilmiy ishlar uchun nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Solutions of Ill-Posed Problems. Wiley, New York, 1977.
2. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. AMS, 1986.
3. Cannon J.R. The One-Dimensional Heat Equation. Addison-Wesley, 1984.
4. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Springer, 2006.
5. Romanov V.G. Inverse Problems of Mathematical Physics. VNU Science Press, 1987.
6. Denisov A.M. Introduction to the Theory of Inverse Problems. Moscow State University, 1994.