

O'ZGARUVCHI KUCHLAR TA'SIRIDA MODDIY NUQTANING HARAKAT DIFFERENSIAL TENGLAMALARINI ANIQLASH

Qodirov Anvar Gulyamovich

Toshkent davlat transport universiteti dotsenti

Abdurahmonov Ahmadulloh Kamoliddin o'g'li

Toshkent davlat transport universiteti talabasi

Annotatsiya: Ushbu maqolada o'zgaruvchi kuchlar ta'sirida harakatlanayotgan moddiy nuqtaning dinamikasi o'rganilgan. Moddiy nuqtaga og'irlik kuchi va elastik (qaytaruvchi) kuchlar ta'siri hisobga olingan holda harakatning differensial tenglamalari tuzilgan. Ushbu tenglamalarning yechimlari aniqlanib, nuqtaning harakat trayektoriyasi ellips ekanligi ko'rsatilgan. Shuningdek, ellipsning asosiy geometrik parametrlari, harakatning davriyligi hamda fizik ma'nosi tahlil qilingan. Olingan natijalar nazariy mexanika fanini o'rganishda muhim ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar: moddiy nuqta, o'zgaruvchi kuchlar, og'irlik kuchi, elastik kuch, harakat differensial tenglamalari, garmonik harakat, elliptik trayektoriya, tezlik, tezlanish, tebranish davri

Annotation: This article studies the dynamics of a material point moving under the action of variable forces. The motion of the material point is analyzed by considering the simultaneous effects of gravitational force and elastic (restoring) force. The differential equations of motion are formulated, their solutions are obtained, and it is shown that the trajectory of the point is an ellipse. In addition, the main geometric parameters of the ellipse, the periodic nature of the motion, and their physical interpretations are discussed. The obtained results are of significant importance in the study of theoretical mechanics.

Keywords: material point, variable forces, gravitational force, elastic force, differential equations of motion, harmonic motion, elliptical trajectory, velocity, acceleration, period of motion.

Аннотация: В данной статье изучается динамика материальной точки, движущейся под действием переменных сил. С учётом действия силы тяжести и упругой (восстанавливающей) силы, составлены дифференциальные уравнения движения. Найдены решения этих уравнений и показано, что траектория движения точки представляет собой эллипс. Также проанализированы основные геометрические параметры эллипса, периодичность движения и его физический смысл. Полученные результаты имеют важное значение при изучении теоретической механики.

Ключевые слова: материальная точка, переменные силы, сила тяжести, упругая сила, дифференциальные уравнения движения, гармоническое движение, эллиптическая траектория, скорость, ускорение, период колебания.

Mexanikada moddiy nuqtaning harakati unga ta'sir etuvchi kuchlar bilan belgilanadi. Agar moddiy nuqtaga bir vaqtning o'zida og'irlik kuchi va qaytaruvchi (elastik) kuch ta'sir etsa, uning harakati murakkab xarakterga ega bo'ladi. Ushbu mavzuda moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamalari tuziladi, ularning yechimlari topiladi va nuqta trayektoriyasi aniqlanadi.

Moddiy nuqta nima?

Moddiy nuqta -bu jismning o'lchamlari va shakli hisobga olinmay, uning butun massasi bitta nuqtada jamlangan deb qaraladigan ideal modeldir. Ya'ni, agar jismning o'lchami harakat masofasiga nisbatan juda kichik bo'lsa, uni soddalashtirish uchun moddiy nuqta sifatida qaraladi.

Dinamikaning asosiy qonuni (Nyutonning ikkinchi qonuni)ga asosan ta'sir etayotgan kuch quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Bu yerda:

$\vec{F}$ -natijaviy kuch,

m -massa,

$\vec{a}$ -tezlanish,

Tezlanish tezlikning vaqt bo'yicha hosilasga teng:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Tezlik esa koordinataning vaqt bo'yicha hosilasidir:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Shuning uchun harakatning asosiy differensial tenglamasi:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}) \text{ ko'rinishni oladi.}$$

Agar harakat bir o'q bo'ylab sodir bo'lsa (masalan, x o'qi bo'lab), tenglama quyidagicha yoziladi:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, v, t).$$

Bu ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamadir.

Masalan:

1. Kuch vaqtga bog'liq bo'lsa:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t).$$

2. Kuch koordinataga bog'liq bo'lsa (qarshilik kuchi):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx.$$

3. Kuch tezlikka bog'liq bo'lsa (qarshilik kuchi):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kv.$$

O'zgaruvchi kuchlar ta'sirida moddiy nuqtaning harakati ikkinchi tartibli differensial tenglama bilan ifodalanadi. Tenglama ko'rinishi kuchning qanday kattalikka bog'liqligiga qarab farqlanadi. Harakatni aniqlash uchun ushbu tenglamani boshlang'ich shartlar asosida yechish zarur. Differensial tenglamalar mexanikada murakkab harakatlarni tahlil qilishning asosiy vositasi hisoblanadi.

1-misol. $m=1\text{kg}$, $x_0=0$, $z_0 = 10\text{m}$, $\dot{x}_0 = 20\text{m/c}$, $\dot{z}_0 = 0$, $\vec{P}=\text{cr}(\vec{i}\cos\alpha+\vec{k}\sin\alpha)$,

$\vec{R} = -\alpha\vec{r}$, $c=4\text{H/m}$, $\alpha = 2\text{H}^*\text{c/m}$. $\vec{R}$ kuchni hisobga olmasdan hamda uni e'tiborga olgan holda nuqtaning harakat tenglamalari topilsin.

Yechish. Moddiy nuqtaga $\vec{G}$ og'irlik kuchi va ta'sir chizig'i qo'zg'almas O markazdan o'tuvchi $\vec{R}$ kuch ta'sir qiladi (1-rasm).

$\vec{R}$ kuchni e'tiborga olmaymiz. $\vec{R}$ kuch M nuqtani O markazga tortadi. Bu kuchning moduli nuqtadan qutbgacha bo'lgan r masofaga to'g'ri proporsional.

Boshlang'ich vaqt onida ($t=0$) M nuqta z o'qining ustiga sanoq boshidan 10 m/s tezlik beriladi.

Berilgan $\vec{P}$, $\vec{G}$ kuchlar va boshlang'ich tezlik vectori v_0 xOz tekisligida joylashgan, shuning uchun nuqtaning keying harakati shu tekislikda ro'y beradi.

Moddiy nuqtaning harakat tenglamalari quyidagi ko'rinishga ega:

$$m\ddot{x}=-c\text{r}\cos\alpha, \quad m\dot{z}=-c\text{r}\sin\alpha-G$$

$$\cos\alpha=x/r, \quad \sin\alpha=z/r$$

$$m\ddot{x}=-Cx, \quad m\dot{z}=-cz-G$$

$$\ddot{x}+k^2x=0, \quad \dot{z}+k^2z=-g \quad (1)$$

$$k=\sqrt{c/m}, \quad k=2\text{ rad/c}.$$

(1) Tenglamalar o'zgarmas foeffisientli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalardir. Ularning birinchisi bir jinsli, ikkinchisi esa-bir jinsli emas.

(1) tenglamalarning yechimi quyidagicha:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt; \quad (2)$$

$$z = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt - g/k^2$$

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

$$\dot{z} = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt. \quad (3)$$

C_1, C_2, C_3, C_4 integrallash o'zgarmaslarini quyidagi boshlang'ich shartlardan topamiz:

$$x_0 = 0; \quad z_0 = 10;$$

$$t=0 \text{ da} \quad (4)$$

$$\dot{x}_0 = 20; \quad \dot{z}_0 = 0.$$

(4) ni (2) va (3) ga qo'yib quyidagilarni olamiz:

$$x_0 = C_1; \quad z_0 = C_3 - g/k$$

$$\dot{x}_0 = C_2 k; \quad \dot{z}_0 = C_4 k.$$

$$C_1 = 0; \quad C_2 = \dot{x}_0/k; \quad C_3 = z_0 + g/k, \quad C_4 = 0 \quad (5)$$

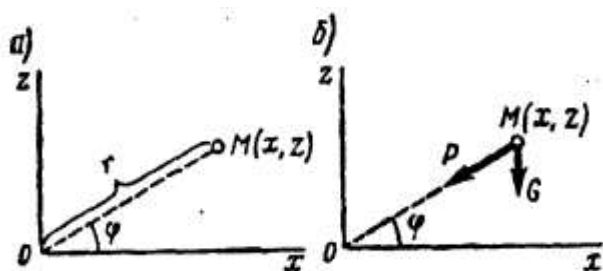
(5) ni (2) ga qo'yib, pirovardida quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$x = (\dot{x}_0/k) \sin kt = 10 \sin 2t;$$

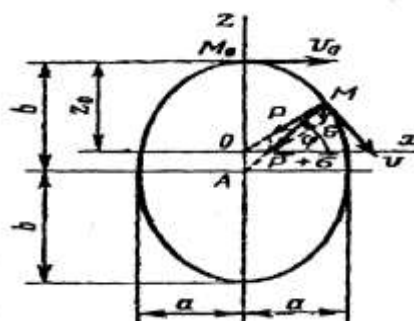
$$z = (z_0 + g/k) \sin kt = -24,9 \sin 2t \quad (6)$$

Ko'rilayotgan masalada nuqta treyktoriyasining tenglamasi olinishi mumkin. Buning uchun (6) harakat tenglamalarni quyidagicha yozib olamiz;

$$x/(\dot{x}_0/k) = \sin kt; (z + g/k) = \cos kt$$



1-rasm



2-rasm

Bu A markazi z o'qi bo'ylab koordinata boshiga nisbatan 2,45m pastga surilgan ellipsning tenglamasidir. Ellipsning yarim o'qlari gorizonta $a=10m$; $b=12,45m$ (2rasm). M nuqtaning ellips bo'ylab harakati davomida $\vec{P}$ va $\vec{G}$ kuchlarning A nuqtaga nisbatan momentlarining yig'indisi hamma vaqt nolga teng bo'ladi.

Boshqacha paytganda $\vec{P}$ va $\vec{G}$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisi hamma vaqt A nuqtadan o'tadi.

Nuqtaning ellips bo'ylab aylanish davri:

$$T=2\pi /k= \pi=3,14c$$

Nuqta radius – vektorning bir davr mobaynida qoplagan yuzasi ellips yuzasiga teng:

$$F= \pi ab= \pi(z_0 + g/k) \dot{x}_0/k$$

Endi $\vec{R}$ kuchni e'tiborga olgan holda nuqtaning harakat tenglamalarini topamiz.

Harakatga qarshilik kuch quyidagicha bo'lsin:

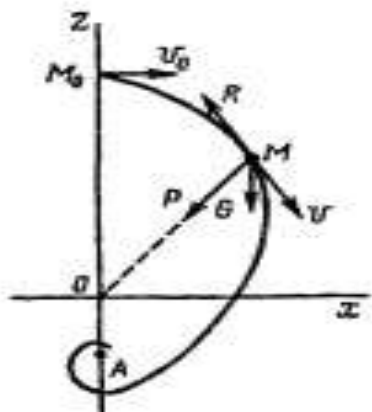
$$\vec{R}=-a\vec{r}=-av=-a(\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j})$$

Moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamalari quyidagi ko'rinishlarni oladi:

$$m\ddot{x}=-cx-a\dot{x} \quad m\dot{z}=-cz-az-G^*$$

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+kx=0, \quad \dot{z}+2n\dot{z}+kz=-g$$

$$2n = \alpha/m, \quad n = 1c$$



Nuqtaning treyktoriyasi A nuqtaga o'raluvchi spiraldan iborat (3-rasm), bu nuqtada $\vec{P}$ va $\vec{G}$ o'zaro muvozanatlashishini tushunish mumkin bo'ladi. Moddiy nuqta A nuqtaga asimptotik ravishda yaqinlashib borishini ta'kidlash mumkin.

3-rasm

Moddiy nuqta $T_4 = 2\pi/k$; $T_4 = 3,63c$ ichida bir marta to'liq aylanadi. Bunda A markazdan harakatlanayotgan nuqttagacha bo'lgan masofa har bir T, c vaqt ichida 37,7 marta kamayib boradi.

MUHOKAMA: Ushbu mavzuda moddiy nuqtaning o'zgaruvchi kuchlar ta'siridagi harakati dinamikaning asosiy qonuni asosida differensial tenglamalar orqali ifodalanishi va ularni integrallash yo'li bilan harakat qonunlarini aniqlanish masalasi ko'rib chiqildi.

Masalada kuch vektori koordinatalarga bog'liq bo'lib, harakat tenglamalari ham vaqt bo'yicha o'zgaruvchi ko'rinishga ega bo'ladi. Bu esa masalani oddiy doimiy kuch ta'siridagi harakatdan farqli ravishda murakkabroq matematik usullar bilan yechishni talab qiladi.

Muhokama jarayonida shuni ko'rish mumkinki, differensial tenglamalarni integrallash orqali moddiy nuqtaning koordinatalari, tezligi va tezlanishini vaqt funksiyasi sifatida aniqlash mumkin bo'ladi.

Bu esa nafaqat nazariy mexanikada, balki muhandislik hisoblarida ham muhim ahamiyatga ega. Ayniqsa, qurilish mexanikasi, mashinasozlik va texnik tizimlarning dinamik tahlilida ushbu usullar keng qo'llaniladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. T. Rashidov va boshqalar. Nazariy mexanika asoslari. T.: O'qituvchi, 2020 y.
2. I. V. Meshcherskiy. Nazariy mexanikadan masalalar to'plami. T.: O'qituvchi, 1986–1989 y.
3. M. M. Mirsaidov va boshqalar. Nazariy va amaliy mexanika. I-qism. T.: Adabiyot, 2023 y., 398 b.
4. P. Shohaydarova, Shoziyotov, Sh. Zoirov. “Nazariy mexanika” darslik. Toshkent, 1991 y.
5. I. V. Meshcherskiy. Nazariy mexanikadan masalalar to'plami o'quv qo'llanmasi. Toshkent, 1989 y.