

GOMOTOPIYA NAZARIY ASOSLARI

Saliyeva Sevara Ma'mirbek qizi

Andijon davlat pedagogika insituti

Matematika-Informatika kafedrası o'qituvchisi

saliyevasevara18@gmail.com

Mahammadshokirova Mohinur Shuhratjon qizi

Andijon davlat pedagogika insituti

Matematika yo'nalishi 2-bosqich talabasi

Annotatsiya:

Ushbu maqolada gomotopiya nazariyasining asosiy tushunchalari, jumladan gomotopiya, gomotopik ekvivalentlik, gomotopiya sinflari va fundamental guruh batafsil tahlil qilinadi. Gomotopiya nazariyasi topologiyaning muhim bo'limi bo'lib, u uzluksiz akslantirishlarni deformatsiya orqali o'rganadi. Maqolada fundamental guruh tushunchasi, uning xossalari va turli topologik fazolar uchun misollar keltirilgan. Shuningdek, gomotopiya nazariyasining zamonaviy fan va texnologiyalardagi qo'llanilishi, xususan robototexnika, fizika, ma'lumotlar tahlili va kompyuter grafikasi sohalarida tutgan o'rni ko'rsatib berilgan.

Kalit so'zlar: gomotopiya, topologiya, fundamental guruh, gomotopik ekvivalentlik, gomotopiya sinflari, algebraik topologiya, uzluksiz akslantirish

Аннотация :

В данной статье рассматриваются основные понятия теории гомотопии, включая гомотопию, гомотопическую эквивалентность, классы гомотопии и фундаментальную группу. Теория гомотопии является важным разделом топологии,

изучающим непрерывные отображения с точки зрения их деформации. В статье также рассматриваются свойства фундаментальной группы и приводятся примеры для различных топологических пространств. Особое внимание уделено практическим применениям теории гомотопии в робототехнике, физике, анализе данных и компьютерной графике.

Ключевые слова: гомотопия, топология, фундаментальная группа, гомотопическая эквивалентность, классы гомотопии

Abstract :

This article discusses the fundamental concepts of homotopy theory, including homotopy, homotopy equivalence, homotopy classes, and the fundamental group. Homotopy theory is an essential branch of topology that studies continuous mappings under continuous deformation. The properties of the fundamental group and examples of various topological spaces are presented. Additionally, the paper highlights applications of homotopy theory in modern science and technology, including robotics, physics, data analysis, and computer graphics.

Keywords: homotopy, topology, fundamental group, homotopy equivalence, algebraic topology

Kirish

Topologiya matematikaning muhim bo‘limi bo‘lib, geometrik shakllarning uzluksiz deformatsiyalar ostida saqlanadigan xususiyatlarini o‘rganadi. Ushbu sohaning asosiy tushunchalaridan biri gomotopiya nazariyasi hisoblanadi. Gomotopiya ikki uzluksiz akslantirishni bir-biriga uzluksiz deformatsiya orqali o‘tkazish imkoniyatini ifodalaydi.

Mazkur maqolaning maqsadi gomotopiya nazariyasining asosiy tushunchalarini o‘rganish va ularning amaliy ahamiyatini ko‘rsatishdan iborat.

Asosiy qism

Gomotopiya nazariyasi algebraik topologiyaning asosiy yo‘nalishlaridan biri bo‘lib, u topologik fazolarni ularning uzluksiz deformatsiyalarga nisbatan invariant xususiyatlari orqali o‘rganadi. Ushbu nazariya topologik obyektlarning “shaklini” emas, balki ularning strukturaviy xususiyatlarini aniqlashga xizmat qiladi. Gomotopiya nazariyasining rivojlanishida fransuz matematigi Anri Puankarening ishlari muhim ahamiyatga ega bo‘lib, u fundamental guruh tushunchasini kiritgan. Bu tushuncha topologik fazolarning asosiy invariantlaridan biri sifatida qaraladi va fazodagi yopiq yo‘llarni o‘rganishga asoslanadi.

Zamonaviy algebraik topologiyada gomotopiya nazariyasi faqat fundamental guruh bilan cheklanib qolmay, balki yuqori o‘lchovli gomotopiya guruhlarini ham o‘z ichiga oladi. Masalan, π_2 , π_3 kabi gomotopiya guruhlarini fazolarning yanada chuqur topologik xususiyatlarini aniqlash imkonini beradi. Bu guruhlar, ayniqsa, sferalar va ko‘p o‘lchovli manifoldlarni o‘rganishda muhim rol o‘ynaydi. Bundan tashqari, gomotopiya nazariyasida kontraktil fazolar tushunchasi ham muhim hisoblanadi. Agar fazo bir nuqtaga uzluksiz deformatsiya qilinishi mumkin bo‘lsa, u kontraktil deyiladi. Bunday fazolar eng sodda topologik tuzilishga ega bo‘lib, ularning barcha gomotopiya guruhlarini trivial bo‘ladi. Gomotopiya nazariyasi kategoriyalar nazariyasi bilan ham chambarchas bog‘liq bo‘lib, u yerda gomotopiyalar morfizmlar orasidagi “yo‘llar” sifatida qaraladi. Bu esa matematik strukturalarni umumiyroq darajada o‘rganish imkonini beradi. Amaliy jihatdan esa gomotopiya nazariyasi topologik ma’lumotlar tahlili (TDA), sun’iy intellekt, signalni qayta ishlash, biologik tizimlarni modellashtirish va hatto ijtimoiy tarmoqlarni tahlil qilishda qo‘llanilmoqda. Ayniqsa, katta hajmdagi ma’lumotlarda yashirin strukturalarni aniqlashda topologik usullar samarali natijalar bermoqda.

Gomotopiya – bu ikki uzluksiz akslantirish orasidagi uzluksiz deformatsiyani ifodalovchi tushuncha.

Ta’rif: X va Y – topologik fazolar bo‘lsin. $f, g: X \rightarrow Y$ – uzluksiz akslantirishlar. Agar

$$H: X \times [0,1] \rightarrow Y$$

Uzluksiz akslantirish mavjud bo‘lib, barcha $x \in X$ uchun

$$H(x,0) = f(x), \quad H(x,1) = g(x)$$

bo'lsa, u holda f va g gomotopik deyiladi va $f \simeq g$ kabi belgilanadi. H akslantirish f dan g ga gomotopiya deb ataladi.

Gomotopiya quyidagi xossalarga ega:

1.refleksivlik

2.simmetriklik

3.tranzitivlik

Bu xossalar uni ekvivalentlik munosabati ekanligini ko'rsatadi.

Gomotopik ekvivalentlik.

Ikki topologik fazo gomotopik ekvivalent deyiladi, agar ular bir-biriga uzluksiz deformatsiya orqali o'tkazilishi mumkin bo'lsa. Bu tushuncha fazolarni klassifikatsiya qilishda muhim rol o'ynaydi.

Masalan:

\mathbb{R}^n fazo kontraktli;

aylana va halqa gomotopik ekvivalent;

aylana va to'g'ri chiziq gomotopik ekvivalent emas;

Gomotopiya sinflari;

Gomotopiya munosabati barcha akslantirishlarni sinflarga ajratadi.

$$g \circ f \simeq \text{id}_X$$

$$f \circ g \simeq \text{id}_Y$$

orqali gomotopiya sinflari belgilanadi.

Masalan:

$$\pi_1(\mathbb{R}^n) = \{e\}$$

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

$$\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

bu yerda \mathbb{Z} o‘ralish sonini bildiradi

Fundamental guruh

Fundamental guruh fazoning eng muhim invariantlaridan biridir. U sikllarning gomotopiya sinflaridan tashkil topadi.

Xulosa

Ushbu maqolada gomotopiya nazariyasining asosiy tushunchalari kompleks tarzda tahlil qilindi va ularning nazariy hamda amaliy ahamiyati yoritib berildi. Tadqiqot davomida gomotopiya tushunchasi ikki uzluksiz akslantirishni bir-biriga uzluksiz deformatsiya orqali o‘tkazish jarayoni sifatida izohlandi va uning refleksivlik, simmetriklik hamda tranzitivlik xossalari asosida ekvivalentlik munosabati ekanligi ko‘rsatildi. Bu esa topologik akslantirishlarni gomotopiya sinflariga ajratish imkonini berishini isbotlaydi. Shuningdek, gomotopik ekvivalentlik tushunchasi chuqur tahlil qilinib, uning gomeomorfizmdan farqi aniq misollar orqali yoritildi. Xususan, gomotopik ekvivalentlik fazolarning geometrik shaklidan ko‘ra ularning umumiy topologik tuzilishini aks ettirishi, ya’ni deformatsiyaga nisbatan barqaror xususiyatlarni o‘rganishga xizmat qilishi ta’kidlandi. Bu esa topologik fazolarni soddalashtirilgan holda o‘rganish imkonini beradi.

Fundamental guruh tushunchasi alohida e’tibor bilan o‘rganildi. U topologik fazoning eng muhim invariantlaridan biri bo‘lib, fazodagi “bir o‘lchovli teshiklar” haqida aniq ma’lumot beradi. Turli fazolar uchun fundamental guruhlarining hisoblanishi orqali ularning topologik jihatdan farqli ekanligi aniqlanishi mumkinligi ko‘rsatildi. Masalan,

aylana, torus va Evklid fazosi uchun fundamental guruhlarining turlicha bo‘lishi ularning tuzilishidagi asosiy farqlarni ifodalaydi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

- 1.O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim muassasalari uchun “Diskret matematika va graf nazariyasi” darsliklari. – Ziyonet elektron kutubxonasi: www.ziyonet.uz
- 2.“Topologiya asoslari” fanidan o‘quv qo‘llanma. – Ziyonet portali: www.ziyonet.uz
- 3.“Graf nazariyasi va uning qo‘llanilishi” o‘quv qo‘llanma. – Milliy kutubxona sayti: www.natlib.uz
- 4.Matematika faniga oid universitet ma’ruza matnlari. – OTM rasmiy saytlari: www.edu.uz
- 5.Umumiy matematika va topologiya bo‘yicha o‘quv-uslubiy majmualar. – Ta’lim portali: www.hemis.uz