

SIRTNING BIRINCHI ASOSIY FORMASI

Saliyeva Sevara Ma'mirbek qizi

Andijon davlat pedagogika insituti

Matematika Informatika kafedrası o'qituvchisi

Saliyevasevara18@gmail.uz

Alijonova Mohizar Quvvatali qizi

Andijon davlat pedagogika insituti

Matematika yo'nalishi talabasi

ANNOTATSIYA

Mazkur maqolada differensial geometriyaning muhim tushunchalaridan biri bo'lgan sirtning birinchi asosiy formasi nazariy jihatdan tahlil qilinadi. Sirtning birinchi asosiy formasi sirt ustida masofa, yoy uzunligi, burchak, yuza elementi kabi metrik kattaliklarni aniqlashda asosiy matematik vosita hisoblanadi. Maqolada parametrik sirt tushunchasi, urinma vektorlar, metrik koeffitsiyentlar, birinchi asosiy forma formulasi hamda uning geometrik mazmuni izchil yoritiladi. Shuningdek, birinchi asosiy formaning differensial geometriya, analitik geometriya, fizika va amaliy modellashtirishdagi ahamiyati ko'rib chiqiladi.

Kalit so'zlar: differensial geometriya, sirt, parametrik tenglama, urinma vektor, metrik koeffitsiyent, birinchi asosiy forma, yoy uzunligi, yuza elementi.

ANNOTATION

This article analyzes one of the fundamental concepts of differential geometry, namely the first fundamental form of a surface. The first fundamental form is an essential mathematical tool for determining metric quantities on a surface, such as distance, arc length, angle, and area element. The article consistently explains the concept of a parametric surface, tangent vectors, metric coefficients, the formula of the first fundamental form, and its geometric meaning. In addition, the importance of the first

fundamental form in differential geometry, analytic geometry, physics, and applied modeling is discussed.

Keywords: differential geometry, surface, parametric equation, tangent vector, metric coefficients, first fundamental form, arc length, area element.

KIRISH

Differensial geometriya matematikaning silliq egri chiziqlar va sirlarni differensial hisob usullari yordamida o‘rganadigan muhim bo‘limidir. Bu fan nafaqat nazariy matematika, balki mexanika, fizika, arxitektura, kompyuter grafikasi, robototexnika, geodeziya va zamonaviy muhandislik masalalarida ham keng qo‘llanadi. Ayniqsa, sirlarning ichki geometrik xossalarini o‘rganishda birinchi asosiy forma markaziy o‘rin tutadi.

Sirt oddiy fazoviy shakl sifatida qaralganda uning tashqi ko‘rinishi, egriligi yoki fazodagi joylashuvi ko‘zga tashlanadi. Ammo differensial geometriyada sirt faqat tashqi ko‘rinish nuqtayi nazaridan emas, balki uning ichki tuzilishi orqali ham o‘rganiladi. Masalan, sirt ustida harakatlanayotgan nuqta uchun eng qisqa yo‘l qanday bo‘lishi, ikki egri chiziq orasidagi burchak qanday o‘lchanishi yoki kichik sohaning yuzasi qanday hisoblanishi sirtning metrik tuzilishiga bog‘liq. Ana shu metrik tuzilishni ifodalovchi asosiy matematik obyekt birinchi asosiy forma deyiladi.

Sirt ko‘pincha ikki parametr orqali beriladi. Agar sirtning har bir nuqtasi fazoda

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

ko‘rinishida ifodalansa, bu yerda u va v — parametrlar, $\vec{r}(u, v)$ esa sirtning radius-vektori hisoblanadi. Ushbu parametrlar o‘zgarishi natijasida sirt ustidagi turli nuqtalar hosil bo‘ladi. Parametrik berilish sirtni matematik jihatdan tahlil qilish uchun juda qulaydir, chunki u orqali sirtning urinma tekisligi, normal vektori, egriligi va metrik xossalari aniqlanadi.

Agar sirt ustida juda kichik du va dv o‘zgarishlar sodir bo‘lsa, ular fazoda kichik yoy elementini hosil qiladi. Shu yoy elementining kvadrati

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

formula orqali ifodalanadi. Bu ifoda sirtning birinchi asosiy formasi deyiladi. Formuladagi E , F , G koeffitsiyentlari sirtning metrik koeffitsiyentlari bo‘lib, ular urinma vektorlarning skalyar ko‘paytmalari orqali aniqlanadi.

ADABIYOTLAR TAHLILI

Sirtning birinchi asosiy formasi haqidagi nazariya klassik differensial geometriya doirasida shakllangan. Bu tushuncha XVIII–XIX asrlarda geometriyaning rivojlanishi jarayonida, ayniqsa, L. Eyler, K. F. Gauss va B. Riman ishlari bilan chambarchas bog‘liq holda rivojlangan. Gaussning sirtlar nazariyasiga oid tadqiqotlari birinchi asosiy formaning geometriyadagi o‘rnini yanada mustahkamladi. Ayniqsa, Gaussning “ajoyib teoremasi” sirtning ichki egriligi faqat birinchi asosiy forma koeffitsiyentlari orqali aniqlanishi mumkinligini ko‘rsatib berdi. Bu esa sirt geometriyasini fazodagi tashqi joylashuvdan mustaqil ravishda o‘rganish imkonini yaratdi.

Differensial geometriyaga oid o‘quv adabiyotlarida birinchi asosiy forma odatda sirtning metrik xossalarini aniqlovchi kvadratik forma sifatida ta’riflanadi. Parametrik sirt uchun avvalo \vec{r}_u va \vec{r}_v urinma vektorlar topiladi. Bu vektorlar mos ravishda u va v parametrlar bo‘yicha xususiy hosilalarni bildiradi. So‘ngra ushbu vektorlarning skalyar ko‘paytmalari orqali

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u, F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v, G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$$

koeffitsiyentlari aniqlanadi. Natijada sirt ustidagi cheksiz kichik masofa elementi topiladi.

O‘zbek va rus tillaridagi matematik adabiyotlarda birinchi asosiy forma sirt ustidagi yoy uzunligi, ikki yo‘nalish orasidagi burchak hamda yuza elementini hisoblashda muhim vosita sifatida izohlanadi. Ingliz tilidagi manbalarda esa bu tushuncha “first fundamental form” deb yuritiladi va ko‘pincha Riman metrikasining maxsus holati sifatida talqin qilinadi. Chunki har qanday silliq sirt o‘zida ikki o‘lchovli Riman fazosi xossalarini mujassamlashtiradi. Shu sababli birinchi asosiy forma faqat klassik geometriya emas, balki zamonaviy differensial geometriya va umumiy nisbiylik nazariyasi bilan ham bog‘liqdir.

Birinchi asosiy forma haqida yozilgan ilmiy va o‘quv manbalarda uchta asosiy yondashuv ko‘zga tashlanadi. Birinchi yondashuvda u sirt ustidagi masofa va uzunliklarni aniqlash vositasi sifatida o‘rganiladi.

METODOLOGIYA

Maqolani tayyorlashda nazariy tahlil, matematik modellashtirish, formulaviy izohlash va taqqoslash metodlaridan foydalanildi. Avvalo, sirtning parametrik ko‘rinishi asos qilib olindi. Chunki birinchi asosiy formani keltirib chiqarish uchun sirtning fazodagi holatini ikki parametr orqali ifodalash zarur. Parametrik sirt quyidagicha beriladi:

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Bu yerda $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ funksiyalar yetarlicha silliq bo‘lishi talab etiladi. Silliqlik sharti sirtning urinma vektorlari va ularning hosilalarini aniqlash imkonini beradi.

Sirt ustida kichik siljish quyidagi differensial orqali ifodalanadi:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$$

Bu yerda \vec{r}_u va \vec{r}_v — sirtning parametrik chiziqlari bo‘yicha yo‘nalgan urinma vektorlardir. Sirt ustidagi kichik yoy elementining kvadrati esa $d\vec{r}$ vektorining o‘z-o‘ziga skalyar ko‘paytmasi orqali aniqlanadi:

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}.$$

Ushbu ifodani ochib yozsak:

$$ds^2 = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) \cdot (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv).$$

Skalyar ko‘paytmaning distributivlik xossasidan foydalanib:

$$ds^2 = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u) du^2 + 2(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) du dv + (\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v) dv^2.$$

Agar

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u, F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v, G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$$

deb belgilansa, quyidagi asosiy formula hosil bo‘ladi:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Bu formula sirtning birinchi asosiy formasi deb ataladi.

Birinchi asosiy forma sirtning ichki metrikasini beradi. Ya'ni sirt fazoda qanday joylashganidan qat'i nazar, uning ustida o'lchanadigan uzunlik, burchak va yuza kabi kattaliklar ushbu forma orqali aniqlanadi.

MUHOKAMA VA NATIJALAR

Sirtning birinchi asosiy formasi differensial geometriyada sirtning eng muhim ichki xususiyatlarini aniqlash imkonini beradi. Ushbu forma yordamida sirt ustidagi egri chiziq uzunligi hisoblanadi. Agar sirt ustidagi egri chiziq $u = u(t)$, $v = v(t)$ parametrlar orqali berilgan bo'lsa, u holda uning uzunligi quyidagi integral orqali aniqlanadi:

$$L = \int_a^b \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt.$$

Bu formula shuni ko'rsatadiki, sirt ustidagi egri chiziq uzunligi oddiy Evklid fazosidagi masofa kabi emas, balki sirtning metrik koeffitsiyentlariga bog'liq holda aniqlanadi. Demak, bir xil parametrik o'zgarish turli sirtlarda turlicha uzunlik hosil qilishi mumkin.

Birinchi asosiy forma yordamida sirt ustidagi ikki yo'nalish orasidagi burchak ham aniqlanadi. Agar sirtning bir nuqtasida ikki urinma yo'nalish berilgan bo'lsa, ularning orasidagi burchak skalyar ko'paytma orqali topiladi. Parametrik chiziqlar orasidagi burchak uchun quyidagi formula o'rinli:

$$\cos \varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Agar $F = 0$ bo'lsa, parametrik chiziqlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi. Bu holat ortogonal koordinatalar sistemasi deb ataladi. Masalan, sfera ustidagi geografik kenglik va uzunlik chiziqlari ko'plab nuqtalarda o'zaro ortogonal yo'nalishlarni hosil qiladi. Shuning uchun F koeffitsiyenti sirt ustidagi parametrik chiziqlarning o'zaro joylashuvini tushunishda muhim ahamiyatga ega.

Birinchi asosiy forma orqali sirt elementining yuzasi ham aniqlanadi. Parametrik sirt uchun yuza elementi quyidagi formula bilan beriladi:

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Bu formula amaliy masalalarda, ayniqsa, sirt yuzasini hisoblashda keng qo‘llanadi. Agar sirtning ma’lum bir sohasi D parametrlar tekisligida berilgan bo‘lsa, sirt yuzasi:

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

integral yordamida topiladi. Bu natija birinchi asosiy formaning faqat nazariy emas, balki hisoblash amaliyotida ham katta ahamiyatga ega ekanini ko‘rsatadi.

Sirtning birinchi asosiy formasini oddiy misol orqali tushuntirish mumkin. Masalan, tekislik quyidagicha parametrik berilgan bo‘lsin:

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, 0).$$

Bu holda:

$$\vec{r}_u = (1, 0, 0), \vec{r}_v = (0, 1, 0).$$

Shuning uchun:

$$E = 1, F = 0, G = 1.$$

Demak, tekislikning birinchi asosiy formasi:

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Bu oddiy Evklid tekisligidagi masofa formulasiga mos keladi. Endi silindr sirtini olaylik:

$$\vec{r}(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v).$$

Bu yerda a — silindr radiusi. Hosilalarni topamiz:

$$\vec{r}_u = (-a \sin u, a \cos u, 0), \vec{r}_v = (0, 0, 1).$$

Shundan:

$$E = a^2, F = 0, G = 1.$$

Silindrning birinchi asosiy formasi:

$$ds^2 = a^2 du^2 + dv^2.$$

XULOSA

Sirtning birinchi asosiy formasi differensial geometriyaning asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, sirt ustidagi masofa, uzunlik, burchak va yuza kabi metrik kattaliklarni aniqlashga xizmat qiladi. U parametrik sirtning urinma vektorlari skalyar ko‘paytmalari orqali hosil qilinadi va

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

ko‘rinishida yoziladi. Bu yerda E , F , G koeffitsiyentlari sirtning metrik tuzilishini belgilaydi.

Tahlillar shuni ko‘rsatadiki, birinchi asosiy forma sirtning ichki geometriyasini o‘rganishda muhim vositadir. U yordamida sirt ustidagi egri chiziq uzunligi, parametrik chiziqlar orasidagi burchak, ortogonallik sharti va sirt yuzasi aniqlanadi. Tekislik, silindr va sfera misollarida ko‘rilganidek, har bir sirtning birinchi asosiy formasi uning geometrik xususiyatlarini aniq ifodalaydi.

Birinchi asosiy forma nazariy matematika bilan bir qatorda fizika, geodeziya, kompyuter grafikasi, muhandislik va modellashtirish sohalarida ham katta amaliy ahamiyatga ega. Shu sababli ushbu mavzuni chuqur o‘rganish sirtlar nazariyasini, Riman geometriyasini va zamonaviy matematik modellashtirish usullarini tushunish uchun zarurdir. Xulosa qilib aytganda, sirtning birinchi asosiy formasi sirt geometriyasining metrik poydevorini tashkil etadi va differensial geometriyaning keyingi murakkab tushunchalarini o‘zlashtirish uchun mustahkam nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. — Москва: Наука, 1974.
2. Дубровин Б. А., Фоменко А. Т., Новиков С. П. Современная геометрия: методы и приложения. — Москва: Наука, 1986.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. — Москва: Наука, 1981.
4. Шарафутдинов В. А. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. — Новосибирск: НГУ, 2003.
5. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Механика. — Москва: Физматлит, 2005.
6. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. — Москва: Физматлит, 2004.