

## TOPOLOGIYANING ASOSIY XOSSALARI

### BASIC PROPERTIES OF TOPOLOGY

### ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ТОПОЛОГИИ

**Saliyeva Sevara Mamirbek qizi**

Aniq va tabiiy fanlar fakulteti

matematika yoʻnalishi 203- guruh talabasi

**Ibrohimova Shodiyaxon Akramjon qizi**

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada topologiyaning asosiy xossalari va ularning matematikadagi oʻrni tahlil qilinadi. Xususan, akslantirish, uzluksizlik, hamda bogʻliqlik kabi muhim tushunchalar yoritiladi. Topologik fazolarning umumiy xususiyatlari va ularning turli matematik masalalarni yechishdagi ahamiyati misollar orqali tushuntiriladi. Shuningdek, topologiyaning boshqa matematik sohalar bilan oʻzaro bogʻliqligi ham koʻrib chiqiladi.

**Kalit soʻzlar:** topologiya, topologik fazo, akslantirish, uzluksizlik, bogʻliqlik, metrik fazo, matematik analiz, uzluksiz tasvir .

**Annotation.** This article analyzes the main properties of topology and their role in mathematics. In particular, important concepts such as reflection, continuity, and dependence are covered. General properties of topological spaces and their importance in solving various mathematical problems are explained through examples. The relationship of topology with other mathematical fields is also considered.

**Key words:** topology, topological space, reflection, continuity, connection, metric space, mathematical analysis, continuous image

**Аннотация.** В данной статье анализируются основные свойства топологии и их роль в математике. В частности, рассматриваются такие важные понятия, как отражение, непрерывность и зависимость. На примерах поясняются общие свойства

топологических пространств и их значение при решении различных математических задач. Также рассматривается связь топологии с другими математическими областями.

**Ключевые слова:** топология, топологическое пространство, отражение, непрерывность, связь, метрическое пространство, математический анализ, непрерывное изображение.

## Kirish

Topologiya fani umumiylik nuqtai nazardan geometriya matematik analiz fanlarining asosiy tushunchalarini qayta ko'rib chiqish natijasida vujudga kelgan . Topologiya fani matematikaning deyarli yosh , lekin muhim qismidir . Topologiyaga quyidagicha ta'rif berish mumkin : topologiya – matematikaning geometrik bo'limi bo'lib , uzluksizlikni tadqiq qiluvchi , ya'ni uzluksiz akslantirishlarni o'rganuvchi sohasi hisoblanadi . Qisqacha qilib aytganda , funksiyaning uzluksisligi tushunchagi ko'ra , metrik fazo topologik fazolar hamda ularning uzluksiz akslantirishlarini anglatadi . Geometrik nuqtai nazardan ikki sonning ayirmasi moduli uni sonlar o'qi  $R$  da nuqtalar orasidagi masofadan iborat ekanligini bildiradi .

1906-yilda fransuz matematigi M. Freshe fanga metrik fazo tushunchasini kiritganidan so'ng ixtiyoriy tabiatli to'plamda ikki nuqta orasidagi masofani ma'lum shartlar asosida aniqlash imkoni tug'ildi.

1914-yilda nemis matematigi F. Xausdorf o'zining “To'plamlar nazariyasi” kitobida birinchi bo'lib nuqtaning atrofi tushunchasini aksiomalashtirib, topologik (atroflar orqali aniqlangan) fazoning ta'rifini ifodalab berdi. Keyinchalik topologik fazolarning nisbatan soddaroq ta'riflari keltirildi.

Topologiya atamasini birinchi bo'lib Listing qo'llagan. Topologiya — matematikaning nisbatan “yosh” va muhim bo'limlaridan biridir. Topologiya fani geometriya va matematik analiz fanlarining qator fundamental faktlarini (tushunchalarini) umumiy nuqtai nazardan qayta ko'rib chiqish natijasida paydo bo'ldi.

Topologiya fan sifatida ilk marta XIX asrning oxirlarida buyuk fransuz matematigi Anri Puankare ishlarida shakllana boshlagan. U topologiyani “analysis situs” (lotinchadan tarjimai - joy (o'rin) geometriyasi) tahlili deb nomlaydi. Bu atamani esa, matematikaga birinchi bo'lib Riman olib kirgan. Keyinchalik bu atamalar bir so'z bilan topologiya deb atala boshlandi.

A. Puankare topologiya to'g'risida shunday degan edi: “O'zimga keladigan bo'lsak, oldinma-ketin kirib chiqqan turfa yo'llar meni “analysis situs” tomon boshlab keldi”.

Bu o'rinda mashhur fransuz matematigi Andre Veylning topologiya xususida aytgan quyidagi so'zlari ham e'tiborga loyiqdir: “Har bir matematikning qalbini zabt etish ustida topologiya farishtasi bilan mavhum algebra shaytoni kurash olib boradi . Bu orqali, birinchidan, topologiyaning ajoyib jozibasi va go'zalligi namoyon bo'lsa, ikkinchidan, barcha zamonaviy matematikaning g'aroyib birikishi topologiya va algebraga eltishi ifoda etiladi”.

Hozirgi zamon fanlarining rivojlanishida topologiyaning fizika, biologiya, ximiya va binobarin, geografiya fanlaridagi tatbig'i qo'llanilmoqda. Topologiyaning sehrli olamiga kirish mashaqqatlidir. Shu sababli topologiya fanining tushuncha, ta'rif va ma'lumotlarini puxta o'zlashtirish muhim. Oddiy topologik tushunchalar bizni o'rab turgan olamga nazar tashlaganda paydo bo'la boshlaydi. O'z-o'zidan tushunarliki, figuralarning geometrik xossalariga figura o'lchamlari, ularning joylashishi, burchaklarining ko'rinishi va hokazolar kiradi. Bu geometrik xususiyatlardan tashqari, yana nimadir nazarimizdan chetda qolayotgandek tuyuladi. Masalan, geometrik chiziqlarning yopiq yoki yopiq emasligi, figuralarning “teshikli” yoki “teshiksiz”, cho'ziluvchan yoki cho'ziluvchan emasligi, geometrik figuralarning zanjirsimonligi yoki yo'qligi, bog'lamli chiziqlarning bog'ichli bo'lishi yoki bo'lmasligi, figuralarni yirtmasdan cho'zish yoki cho'zish mumkin emasligi kabi xossalarini inobatga oladigan bo'lsak, Evklid geometriyasidan sal tashqariga chiqishga to'g'ri keladi. Aynan shu o'rganish natijasida va shu kabi geometrik figuralarning xossalarini o'rganuvchi topologiya fani elementlari kirib kela boshladi.

A. Puankare nuqtai nazariga ko'ra , topologiya shunday fanki, u geometrik figuralarning sifatli xossalari faqat uch o'lchamli fazoda emas, balki undan yuqori o'lchamli fazolarda ham o'rganishga yordam beradi. Geometrik figuralarning sifatli xossalari deganda, masalan, sferani rezina qobiq bilan qoplangan deb faraz qilib, uni yetarlicha siqishni yoki yetarlicha uzmasdan cho'zishni tushunish mumkin. Sferani bunday almashtirishlar topologik gomeomorfizm deb yuritiladi. Gomeomorfizm natijasida hosil qilingan har xil geometrik flguralar o'zaro gomeomorf deyiladi. Figuralarning sifatli xossalari bu figuraga o'zaro gomeomorf bo'lgan barcha geometrik figuralarga tegishli bo'ladi. Bunday xossalar bir so'z bilan topologik xossalar deb ataladi.

### Metrik fazo

Metrik fazo - bu biror bo'sh bo'lmagan to'plamdagi ikki element (nuqta) orasidagi masofani aniqlash ma'lum demakdir. Bu ikki nuqta orasidagi masofani aniqlash amali ma'lum bir shartlami (aksiomalarni) qanoatlantirishi shart bo'ladi. Bu shartlar masofa (yoki metrika) aksiomalari deb yuritiladi. Metrik fazo matematikaning deyarli barcha sohalariga tatbiq etiladi. Qolaversa, barcha fanlarda ham turli-tuman ko'rinishda ishlatiladi. Fazoda (to'plamda) ikki nuqta orasidagi masofa ma'lum bo'lsa, nuqtalarning o'zaro "yaqin"ligini, nuqta va to'plamning, qolaversa, ikkita to'plam (figura) "yaqin"ligini aniqlasa bo'ladi. Bu esa, fazoning, figuralarning turli geometrik xossalari o'rganishda muhim ahamiyatga egadir.

Bo'sh bo'lmagan  $X$  to'plam va  $R$  haqiqiy sonlar to'plami berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa,  $\rho: X \times X \rightarrow R$  akslantirish  $X$  to'plamda metrika deyiladi:

$$(\rho 1). \forall x, y \in X, \rho(x, y) > 0 ;$$

$$(\rho 2). \rho(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y ;$$

$$(\rho 3). \rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in X \text{ (simmetriklik aksiomasi);}$$

$$(\rho 4). \rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z) \forall x, y, z \in X \text{ (uchburchak aksiomasi).}$$

Agar  $X$  to‘plam va  $\rho$  akslantirish metrika tashkil qilsa, ular birgalikda metrik fazo deyiladi va  $(X, \rho)$  ko‘rinishda yoziladi. Metrikani  $(X, \rho)$  metrik fazoda ikki element yoki ikki nuqta orasidagi masofa deb tushuniladi.

### Akslantirish

Akslantirish  $f: X \rightarrow Y$  ning biror nuqtadagi uzluksizlik shartini olaylik, bunda nuqtaning yetarli “yaqin” nuqtalari obrazning yetarli “yaqin” nuqtalariga o‘tadi. Bu fikrni geometrik tasavvur nuqtai nazardan ifodalaymiz:  $X$  metrik fazo  $x_0$  nuqtasining (xususiy holda  $R$  - to‘g‘ri chiziq)  $\varepsilon$  atrofi  $O_\varepsilon(x_0)$  deb fazoning  $x_0$  nuqtadan  $\varepsilon > 0$  dan katta bo‘lmagan uzoqlikda yotgan nuqtalari to‘plamini bildiradi, ya’ni  $O_\varepsilon(x_0) = \{x: \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$  (to‘g‘ri chiziqda  $x_0$  nuqtaning  $\varepsilon$  atrofi  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  intervaldan iborat).

Akslantirishning  $x_0$  nuqtasidagi uzluksizligi quyidagi ko‘rinishni oladi: ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  son uchun shunday  $\delta > 0$  topilib,  $x \in O_\varepsilon(x_0)$  nuqtalar uchun  $f(x) \in O_\delta f(x_0)$  o‘rinli bo‘laveradi.

Bu esa,  $f: X \rightarrow Y$  akslantirish  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo‘lishi,  $x_0$  nuqtaning yetarli “zich” atrofidagi nuqtalari obrazi  $f(x_0)$  nuqtaning yetarli “zich” atrofidagi nuqtalariga akslanadi demakdir.

Bundan ko‘rinadiki, akslantirishning nuqtadagi uzluksizligini aniqlash uchun nuqtalar orasidagi masofa yetarli emas, balki nuqtaning atrofi tushunchasidan foydalanish ma’qul bo‘ladi.

### Topologik fazo

Ixtiyoriy “tabiatli” bo‘sh bo‘lmagan  $X$  to‘plam va  $\tau = \{U_\alpha: U_\alpha \subseteq X, \alpha \in A\}$  sistema (shu  $X$  to‘plamning to‘plamostilardan tashkil topgan) berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar  $\tau$  sistema (to‘plamostilar oilasi) quyidagi:

- 1)  $\emptyset, X \in \tau$

2)  $\tau$  sistemaning ixtiyoriy sondagi elementlarining birlashmasi  $\tau$  ga tegishli bo'lsa, ya'ni  $\forall A' \subset A$  uchun  $\bigcup_{\alpha' \in A'} U_{\alpha'} \in \tau$ ;  $\alpha' \in A'; U_{\alpha'} \in \tau$ ;

3)  $\tau$  sistemaning ixtiyoriy chekli sondagi elementlari kesishmasi  $\tau$  ga tegishli bo'lsa, ya'ni  $\forall \alpha_1 \in A, i = \overline{1, S} \cap_{i=1}^S U_{\alpha_1} \in \tau$  shartlarni qanoatlantirsa,  $\tau$  Sistema  $X$  to'plamdagi topologiya,  $(X; \tau)$  juftlik esa, birgalikda topologik fazo deyiladi.  $(X; \tau)$  topologik fazo tashkil qilsa,  $\tau$  sistemaning elementlari ochiq to'plamlar deb ataladi. Bu ta'rifdagi 1-3-shartlar topologiyaning yoki topologik fazoning aksiomalari deb yuritiladi. Ta'rifdan ma'lumki,  $X$  to'plam qanday bo'lishidan qat'i nazar, topologik fazodagi ochiq to'plamlar turlicha bo'lishi mumkin ekan. Ko'p hollarda, agar  $(X; \tau)$  topologik fazo bo'lsa,  $\tau$  sistema topologik struktura,  $X$  to'plam esa,  $(X; \tau)$  topologik fazoning yoki topologiyaning ifodalovchisi-eltuvchisi deb ataladi.

## Xulosa

Xulosa qilib aytganda, topologiyaning asosiy xossalari matematikada fazolarni chuqurroq o'rganish va ularning ichki tuzilishini tushunishda muhim ahamiyat kasb etadi. Ochiq va yopiq to'plamlar, uzluksizlik, kompaktlik hamda bog'liqlik kabi tushunchalar topologik fazolarning eng muhim belgilarini ifodalaydi. Ushbu xossalar yordamida turli matematik obyektlarning umumiy xususiyatlari aniqlanadi va ular orasidagi bog'lanishlar o'rganiladi.

Shuningdek, topologik xossalar faqat nazariy ahamiyatga ega bo'lib qolmay, balki analiz, algebra va boshqa matematik yo'nalishlarda ham keng qo'llaniladi. Natijada, topologiya matematikaning muhim va ajralmas bo'limi sifatida murakkab jarayonlarni soddalashtirish va umumlashtirish imkonini beradi.

## Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Xo'jayev T., To'xtasinov M. Topologiya asoslari. Toshkent, 2010.
2. Rasulov A. Oliy matematika kursi. Toshkent, 2005.
3. Jo'rayev T.F. Topologiyaga kirish. Toshkent, 2012.

4. Karimov Sh. Oliy matematika. Toshkent, 2008.
5. O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim darsliklari va o‘quv qo‘llanmalari.