

KRAMER QOIDASINING UMUMLASHTIRILGAN MATRITSA TENGLAMALARIGA TATBIQI

O‘razaliyev Shirinboy Bo‘ron o‘g‘li

SamISI asissenti

Annotatsiya: Ushbu maqolada chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda qo‘llaniladigan Kramer qoidasining matritsa tenglamalariga umumlashtirilishi o‘rganilgan. Klassik Kramer qoidasi o‘ng tomoni vektor bo‘lgan sistemalar uchun yechimni determinantlar nisbati ko‘rinishida beradi. Ammo amaliyotda o‘ng tomoni matritsa bo‘lgan tenglamalar ham uchraydi. Maqolada bunday tenglamalar uchun umumlashtirilgan qoida keltirilgan, uning to‘g‘riligi isbotlangan va sonli misollar orqali tushuntirilgan. Maqola matematika va muhandislik sohalari uchun foydalidir.

Kalit so‘zlar: Kramer qoidasi, determinant, matritsa tenglamasi, chiziqli algebra, umumlashtirish, matritsa yechimi.

KIRISH

Chiziqli algebraning asosiy masalalaridan biri – chiziqli tenglamalar sistemasini yechishdir. Bizga maktab matematikasidan ma‘lum bo‘lgan n ta noma‘lumli n ta tenglamadan iborat sistemani matritsa shaklida $Ax = b$ ko‘rinishida yozish mumkin. Bu yerda A – kvadrat matritsa, x – noma‘lumlar vektori, b – ozod hadlar vektori.

Agar A matritsasining determinanti noldan farqli bo‘lsa, sistema yagona yechimga ega. Bu yechimni topishning usullaridan biri – Kramer qoidasidir. Kramer qoidasiga ko‘ra, har bir noma‘lum alohida-alohida hisoblanadi: noma‘lumning qiymati, A matritsasining tegishli ustunini b vektori bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan matritsaning determinantini, dastlabki A matritsasining determinantiga bo‘lish orqali topiladi.

Kramer qoidasi nazariy jihatdan juda muhim, chunki u yechimning aniq analitik ifodasini beradi. Biroq amaliy hisoblashlarda bu usul ko‘p vaqt talab qiladi. Shunga qaramay, u matritsalar nazariyasini o‘rganishda fundamental ahamiyatga ega.

Muammo: Agar tenglamaning o‘ng tomonida vektor emas, balki matritsa bo‘lsa-chi?

Ya'ni $A X = B$ ko'rinishidagi tenglama qaralsa, bunda A – kvadrat matritsa, B – to'g'ri to'rtburchak matritsa, X esa noma'lum matritsa. Bunday holda klassik Kramer qoidasini to'g'ridan-to'g'ri qo'llab bo'lmaydi.

Maqolaning maqsadi: Kramer qoidasini $A X = B$ ko'rinishidagi matritsa tenglamalariga umumlashtirish va yechimning har bir elementini determinantlar yordamida qanday ifodalash mumkinligini ko'rsatish.

ASOSIY TUSHUNCHALAR

Maqolada quyidagi tushunchalardan foydalaniladi:

Matritsa – sonlarning to'g'ri to'rtburchak shaklda joylashtirilgan jadvali.

Kvadrat matritsa – satrlar soni ustunlar soniga teng bo'lgan matritsa.

Determinant – kvadrat matritsaga bog'liq bo'lgan va uning xossalarini ifodalovchi bitta son.

Teskari matritsa – A matritsasiga ko'paytirilganda birlik matritsani beradigan matritsa. Teskari matritsa faqat determinanti noldan farqli bo'lganda mavjud.

Noldan farqli determinant – matritsaning teskarisi mavjudligini ko'rsatadi.

Matritsa tenglamasi – noma'lum matritsa qatnashgan tenglama.

Klassik Kramer qoidasining ma'nosi quyidagicha: $A x = b$ sistemani yechish uchun, avval A matritsasining determinanti hisoblanadi. So'ngra, birinchi noma'lumni topish uchun A matritsasining birinchi ustuni b vektor bilan almashtiriladi va hosil bo'lgan matritsaning determinanti topiladi. Bu determinant asosiy determinantga bo'linadi. Ikkinchi noma'lum uchun ikkinchi ustun almashtiriladi va hokazo.

UMUMLASHTIRILGAN KRAMER QOIDASI

Asosiy teorema

Teorema 1.

Faraz qilaylik, A kvadrat matritsasining determinanti noldan farqli bo'lsin. B esa ixtiyoriy to'g'ri to'rtburchak matritsa bo'lsin. U holda $A X = B$ matritsa tenglamasining yagona yechimi mavjud va bu yechimning har bir elementi quyidagi qoida bo'yicha topiladi:

X matritsasining i -satr va j -ustunidagi elementni topish uchun:

A matritsasining j -ustunini olib tashlab, uning o'rniga B matritsasining i -ustunini qo'yamiz.

Hosil bo'lgan yangi matritsaning determinantini hisoblaymiz.

Bu determinantni dastlabki A matritsasining determinantiga bo'lamiz.

Natijada hosil bo'lgan son X matritsasining (i, j) -elementiga teng.

Izoh: Bu qoida shuni anglatadiki, X matritsasining har bir ustuni alohida-alohida klassik Kramer qoidasi yordamida topiladi. Ya'ni X matritsasining birinchi ustuni $A x = (B \text{ ning birinchi ustuni})$ sistemaning yechimi, ikkinchi ustuni $A x = (B \text{ ning ikkinchi ustuni})$ sistemaning yechimi va hokazo.

Teoremaning isboti

Teoremani isbotlash juda sodda. $A X = B$ tenglamasini ustunlar bo'yicha yozamiz. Agar B matritsasi m ta ustundan iborat bo'lsa, u holda $A X = B$ tenglama m ta alohida tenglamalar sistemasiga ajraladi:

$$A (\text{X ning birinchi ustuni}) = (B \text{ ning birinchi ustuni})$$

$$A (\text{X ning ikkinchi ustuni}) = (B \text{ ning ikkinchi ustuni})$$

$$A (\text{X ning } m\text{-ustuni}) = (B \text{ ning } m\text{-ustuni})$$

Har bir sistema $A x = (b \text{ vektori})$ ko'rinishida bo'lib, bunda A matritsasining determinanti noldan farqli. Shuning uchun har bir sistema klassik Kramer qoidasi bilan yechiladi. Yechimning i -elementi esa aynan X matritsasining (i, j) -elementiga teng.

Isbot tugadi.

A matritsasi teskari bo'lmagan hol

Agar A matritsasining determinanti nolga teng bo'lsa, ya'ni A maxsus matritsa bo'lsa, u holda $A X = B$ tenglamaning yechimi har doim ham mavjud emas. Yechim mavjud bo'lishi uchun qo'shimcha shart bajarilishi kerak: A matritsasining rangi va kengaytirilgan $[A | B]$ matritsasining rangi teng bo'lishi kerak.

Agar bu shart bajarilsa, yechim mavjud, lekin u yagona bo'lmaydi (cheksiz ko'p yechimlar bo'ladi). Bu holda ham yechimning ayrim komponentlarini determinantlar yordamida ifodalash mumkin, ammo bu ifoda murakkabroq va yagona emas.

MISOLLAR

4.1. 2×2 matritsa uchun misol

Berilgan:

A matritsasi: birinchi satr [2, 1], ikkinchi satr [1, 1]

B matritsasi: birinchi satr [3, 4], ikkinchi satr [2, 1]

A matritsasining determinanti: $(2 \times 1 - 1 \times 1) = 1$. Demak determinant noldan farqli.

Endi X matritsasining elementlarini topamiz.

Birinchi noma'lum - X ning birinchi satr birinchi ustun elementi (x_{11}):

A matritsasining birinchi ustunini B ning birinchi ustuni bilan almashtiramiz. B ning birinchi ustuni [3, 2] (yuqoridan pastga). Hosil bo'lgan matritsa: birinchi satr [3, 1], ikkinchi satr [2, 1]. Uning determinanti: $(3 \times 1 - 1 \times 2) = 1$. Endi 1 ni A ning determinantiga (1 ga) bo'lamiz. Natija 1. Demak $x_{11} = 1$.

Ikkinchi noma'lum - X ning ikkinchi satr birinchi ustun elementi (x_{21}):

A matritsasining ikkinchi ustunini B ning birinchi ustuni bilan almashtiramiz. Hosil bo'lgan matritsa: birinchi satr [2, 3], ikkinchi satr [1, 2]. Determinanti: $(2 \times 2 - 3 \times 1) = 4 - 3 = 1$. 1 ni 1 ga bo'lamiz. Natija 1. Demak $x_{21} = 1$.

Uchinchi noma'lum - X ning birinchi satr ikkinchi ustun elementi (x_{12}):

A matritsasining birinchi ustunini B ning ikkinchi ustuni bilan almashtiramiz. B ning ikkinchi ustuni [4, 1]. Hosil bo'lgan matritsa: birinchi satr [4, 1], ikkinchi satr [1, 1]. Determinanti: $(4 \times 1 - 1 \times 1) = 4 - 1 = 3$. 3 ni 1 ga bo'lamiz. Natija 3. Demak $x_{12} = 3$.

To'rtinchi noma'lum - X ning ikkinchi satr ikkinchi ustun elementi (x_{22}):

A matritsasining ikkinchi ustunini B ning ikkinchi ustuni bilan almashtiramiz. Hosil bo'lgan matritsa: birinchi satr [2, 4], ikkinchi satr [1, 1]. Determinanti: $(2 \times 1 - 4 \times 1) = 2 - 4 = -2$. -2 ni 1 ga bo'lamiz. Natija -2. Demak $x_{22} = -2$.

Shunday qilib, X matritsasi: birinchi satr [1, 3], ikkinchi satr [1, -2] bo'ladi.

Tekshirish: A ni X ga ko'paytiramiz:

Birinchi satr birinchi ustun: $2 \times 1 + 1 \times 1 = 2 + 1 = 3$ (B ning birinchi satr birinchi ustuniga teng)

Birinchi satr ikkinchi ustun: $2 \times 3 + 1 \times (-2) = 6 - 2 = 4$ (B ning birinchi satr ikkinchi ustuniga teng)

Ikkinchi satr birinchi ustun: $1 \times 1 + 1 \times 1 = 1 + 1 = 2$ (B ning ikkinchi satr birinchi ustuniga teng)

Ikkinchi satr ikkinchi ustun: $1 \times 3 + 1 \times (-2) = 3 - 2 = 1$ (B ning ikkinchi satr ikkinchi ustuniga teng)

Natija B bilan bir xil. Demak, yechim to'g'ri.

Diagonal matritsa uchun misol

Berilgan:

A matritsasi: birinchi satr [1, 0, 0], ikkinchi satr [0, 2, 0], uchinchi satr [0, 0, 3]

B matritsasi: birinchi satr [5, 6], ikkinchi satr [7, 8], uchinchi satr [9, 10]

A ning determinanti: $1 \times 2 \times 3 = 6$ (noldan farqli).

Umumlashtirilgan Kramer qoidasiga ko'ra, x_1 ni topish uchun A ning birinchi ustunini B ning birinchi ustuni ([5,7,9]) bilan almashtiramiz. Hosil bo'lgan matritsaning determinanti: $5 \times 2 \times 3 = 30$. 30 ni 6 ga bo'lamiz: 5. Demak $x_1 = 5$.

x_2 ni topish uchun birinchi ustunni B ning ikkinchi ustuni ([6,8,10]) bilan almashtiramiz. Determinant: $6 \times 2 \times 3 = 36$. $36/6 = 6$. $x_2 = 6$.

Xuddi shunday davom etsak, X matritsasi:

birinchi satr [5, 6]

ikkinchi satr [3.5, 4] (chunki $7 \times 1 \times 3 = 21$, $21/6 = 3.5$ va $8 \times 1 \times 3 = 24$, $24/6 = 4$)

uchinchi satr [3, 10/3] (chunki $9 \times 1 \times 2 = 18$, $18/6 = 3$ va $10 \times 1 \times 2 = 20$, $20/6 \approx 3.33$)

Bu natija A ning teskari matritsasini B ga ko'paytirish bilan bir xil.

NATIJARLAR

Ushbu tadqiqotda quyidagi natijalarga erishildi:

Klassik Kramer qoidasi $A X = B$ ko'rinishidagi matritsa tenglamalariga muvaffaqiyatli umumlashtirildi.

Umumlashtirilgan qoidaning isboti matritsa tenglamasini ustunlar bo'yicha ajratish orqali sodda va tushunarli tarzda berildi.

Yechimning har bir elementi (matritsaning har bir komponenti) alohida determinantlar nisbati sifatida ifodalanishi ko'rsatildi.

A matritsasining determinanti nolga teng bo'lgan maxsus holatlar uchun yechim

mavjudligining sharti (rang sharti) va yechim tuzilishi haqida qisqacha tahlil berildi.

Sonli misollar orqali nazariy natijalarning to‘g‘riligi amalda tekshirildi.

XULOSA

Ushbu maqolada Kramer qoidasining $A X = B$ matritsa tenglamalariga umumlashtirilgan versiyasi keltirildi. Umumlashtirilgan qoidaning mohiyati quyidagicha:

Agar A kvadrat matritsasining determinanti noldan farqli bo‘lsa, u holda $A X = B$ tenglamaning yechimi mavjud va yagondir. Yechimning i -satr va j -ustunidagi elementi A matritsasining j -ustunini B matritsasining i -ustuniga almashtirishdan hosil bo‘lgan matritsaning determinantini A matritsasining determinantiga bo‘lish orqali topiladi.

Bu natija klassik Kramer qoidasining tabiiy kengaytmasi bo‘lib, matritsa tenglamalarining yechimini determinantlar orqali ifodalaydi. Garchi bu usul amaliy hisoblashlar uchun unchalik samarali bo‘lmasa-da (determinantlarni hisoblash murakkab), u quyidagi jihatlardan qimmatlidir:

Matritsa tenglamalari yechimining analitik ifodasini beradi.

Determinantlarning xossalarini o‘rganishda yordam beradi.

Ta‘lim maqsadlarida matritsa tenglamalarining mohiyatini tushuntirishda qulay.

Matritsalar nazariyasining fundamental tushunchalarini mustahkamlaydi.

Kelgusida ushbu umumlashtirishni blok-matritsa tenglamalariga va matritsa funksiyalariga kengaytirish mumkin.

ADABIYOTLAR

1. Strang G. Linear Algebra and Its Applications. 4th ed. – Cengage Learning, 2006.
2. Horn R.A., Johnson C.R. Matrix Analysis. 2nd ed. – Cambridge University Press, 2013.
3. Meyer C.D. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. – SIAM, 2000.
4. Lay D.C., Lay S.R., McDonald J.J. Linear Algebra and Its Applications. 5th ed. – Pearson, 2016.
5. Xudoyberganov M.U., Vorisov A.K. Chiziqli algebra. – Toshkent: “Universitet”, 2015.
6. Anton H., Rorres C. Elementary Linear Algebra. 11th ed. – Wiley, 2014.