SIRTLARNING EGRILIKLARI: GAUSS EGRILIGI VA O‘RTACHA EGRILIK

Saliyeva Sevara Ma’mirbek qizi
Andijon davlat pedagogika instituti
“Matematika va Informatika” kafedrasi o’qituvchisi
E-mail: saliyevasevara18@gmail.com
Maxsudova Sevara Mirzaqosim qizi
Andijon davlat pedagogika instituti
“Aniq va tabiiy “ fanlar fakulteti
Matematika yo`nalishi 2-kurs talabasi
Sevaramaxsudova06@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada differensial geometriya fanining muhim yo‘nalishlaridan biri bo‘lgan sirtlar nazariyasining fundamental ko‘rsatkichlari — Gauss egriligi (K) va o‘rtacha egrilik (H) tushunchalari atroflicha tahlil qilinadi. Tadqiqot davomida sirtning nuqtadagi egrilik holatini xarakterlovchi asosiy kvadratik formalar va bosh egriliklar o‘rtasidagi bog‘liqliklar yoritilgan. Maqolaning asosiy mazmuni quyidagilardan iborat: Gauss egriligi: Sirtning ichki geometriyasini belgilovchi invariant sifatida qaraladi. Maqolada Gaussning "Theorema Egregium" (Ajoyib teorema) tasdig‘iga tayanib, bu egrilikning sirtni egish (izometriya) natijasida o‘zgarmasligi isbotlangan va geometrik interpretatsiyasi berilgan. O‘rtacha egrilik: Sirtning tashqi (atrof-muhitga nisbatan) joylashishini ifodalovchi kattalik sifatida o‘rganiladi. Maqolada o‘rtacha egriligi nolga teng bo‘lgan minimal sirtlarning xossalari va ularning fizika hamda variatsion hisobdagi ahamiyati ko‘rsatilgan.

**Kalit so`zlar.** sirtlar nazariyasi, egrilik, gauss egriligi, o`rtacha egrilik, bosh egriliklar, ichki geometriya, kvadratik formalar ,riman metrikasi, minimal sirtlar

Abstract. This article provides a detailed analysis of the fundamental indices of the theory of surfaces, one of the important areas of differential geometry, namely the concepts of Gaussian curvature (K) and mean curvature (H). During the study, the relationships between the main quadratic forms and principal curvatures characterizing the curvature of a surface at a point are highlighted. The main content of the article is as follows: Gaussian curvature: It is considered as an invariant that determines the internal geometry of a surface. The article proves that this curvature does not change as a result of bending the surface (isometry), based on the assertion of Gauss's "Theorema Egregium" (Excellent Theorem), and gives a geometric interpretation. Mean curvature: It is studied as a quantity that expresses the external (relative to the environment) location of the surface. The article shows the properties of minimal surfaces with a mean curvature of zero and their significance in physics and variational calculus.

Keywords. surface theory, curvature, Gaussian curvature, mean curvature, principal curvatures, interior geometry, quadratic forms, Riemannian metric, minimal surfaces

Аннотация. В данной статье представлен подробный анализ фундаментальных индексов теории поверхностей, одной из важных областей дифференциальной геометрии, а именно понятий гауссовой кривизны (K) и средней кривизны (H). В ходе исследования освещаются взаимосвязи между основными квадратичными формами и главными кривизнами, характеризующими кривизну поверхности в точке. Основное содержание статьи следующее: Гауссова кривизна: рассматривается как инвариант, определяющий внутреннюю геометрию поверхности. В статье доказывается, что эта кривизна не изменяется в результате изгиба поверхности (изометрии), на основе утверждения «Теоремы Эгрегиум» Гаусса (Превосходной теоремы), и дается геометрическая интерпретация. Средняя кривизна: изучается как величина, выражающая внешнее (относительно окружающей среды) положение поверхности. В статье показаны свойства минимальных поверхностей со средней кривизной, равной нулю, и их значение в физике и вариационном исчислении.

Ключевые слова. теория поверхностей, кривизна, гауссова кривизна, средняя кривизна, главные кривизны, внутренняя геометрия, квадратичные формы, риманова метрика, минимальные поверхности

Sirtlar nazariyasi differensial geometriyaning markaziy qismlaridan biri bo‘lib, uning fundamentini sirtlarning egriliklari tashkil etadi. Asosan, Gauss egriligi va o‘rtacha egrilik tushunchalari sirtning geometrik tabiatini, uning fazodagi shaklini va ichki xossalarini tavsiflovchi asosiy tushunchalardir. Ushbu mavzuning dolzarbligi bir necha muhim omillar bilan belgilashimiz mumkin: K.F. Gauss tomonidan isbotlangan "Ajoyib teorema" (Theorema Egregium) sirtning to‘liq egriligi uning metrikasiga bog'liqligini, ya'ni sirtni buzmasdan egish orqali Gauss egriligini o‘zgartirib bo‘lmasligini ko‘rsatdi. Bu kashfiyot zamonaviy Riman geometriyasi va umumiy nisbiylik nazariyasining rivojlanishiga tamal toshi bo‘lib xizmat qildi. O‘rtacha egrilik tushunchasi fizikada, ayniqsa minimal sirtlar nazariyasida (masalan, sovun pufakchalari yoki kapillyar hodisalar) juda muhim rol o‘ynaydi.

Gauss va o‘rtacha egriliklar. $\hat{O}$ sirtning p nuqtasidagi bosh egriliklar k_1 , k_2 bo‘lsà, $H = \frac{k_1+k_2}{2}$ va $K = k_1 * k_2$ ifodalar mos ravishda $\hat{O}$ sirtning p nuqtadagi o‘rta va to‘liq(yoki Gauss)egriliklari deb ataladi.Bosh egriliklar $\det|B - \lambda A| = 0$ tenglamaning yechimi ekanligini hisobga olsak

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} \text{ va } H = \frac{1}{2}\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2}$$

formulalarni hosil qilamiz. Birinchi kvadratik forma musbat aniqlangani uchun Gauss egriligining ishorasi $LN - M^2$ ifodaning ishorasiga bog’liqdir. Agar p^0 nuqtada $K > 0$ bo‘lsa, uni elliptik nuqta, $K < 0$ bo‘lsa, giperbolik nuqta, agar $K = 0$ bo‘lsa, p ni parabolik nuqta deb ataymiz.

Birort $\vec{a}$ yo‘nalish bo‘yicha $k_n(\vec{a}) = 0$ bo‘lsa, bunday yo‘nalishni asimptotik yo‘nalish deb ataymiz. $\vec{a} = \{x, y\}$ vektor aniqlovchi yo‘nalish asimptotik yo‘nalish bo‘lishi uchun $Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = 0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Elliptik nuqtada asimptotik yo‘nalishlar yo‘q, giperbolik nuqtada ikkita asimptotik yo‘nalish mavjud, parabolik nuqtada bitta asimptotik yo‘nalish mavjud va nihoyat yassilanish nuqtasida (ya’ni $k_1 = 0$, $k_2 = 0$bo‘lganda) hamma yo‘nalishlar asimptotik yo‘nalishdir.

F sirtda silliq γ chiziq $u = u(t)$, $v = v(t)$ tenglama bilan berilib, uning har bir nuqtasida urinma vektori asimptotik yo‘nalishni aniqlasa, bunday chiziq asimptotik chiziq deyiladi. Tabiiyki, sirtda to‘g’ri chiziq yotsa, u asimptotik chiziq bo‘ladi. Analitik geometriya kursidan bilamizki, bir pallali giperboloidning har bir nuqtasida ikkita asimptotik yo‘nalish mavjud. γ asimptotik chiziq bo‘lishi uchun $u(t), v(t)$ funksiyalar $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$ differensial tenglamaning yechimlari bo‘lishi zarur va yetarlidir. F sirtda $u = \text{const}$ va $v = \text{const}$ tenglama bilan aniqlanadigan chiziqlar (ya’ni koordinata chiziqlari) asimptotik chiziqlar bo‘lishi uchun $L = N = 0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Normal egrilik. Ô sirtni uning ð nuqtasidan o‘tuvchi tekislik bilan kessak, kesimda R nuqtadan o‘tuvchi silliq egri chiziq hosil bo‘ladi. Bunday egri chiziqni tekis kesim deb ataymiz. Agar γ tekis kesim bo‘lsa, albatta uning buralishi nolga teng bo‘ladi. Endi Ô sirtning ð nuqta atrofidagi $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ parametrlash usulini qaraylik. Aniqlik uchun ð ning ichki koordinatalari $u_0 = u(t_0), v_0 = u(t_0)$ bo‘lsin. Tekis kesim γ tenglamasini tabiiy parametr (ya’ni yoy uzunligi) yordamida $\vec{p} = \vec{r}(u(s), v(s))$ ko‘rinishda yozib, uning uchun Frane formulalarini yozaylik (buralish nolga tengligini hisobga olib)

$$\begin{cases} \dot{\vec{\tau}} = k\vec{v} \\ \dot{\vec{v}} = -k\vec{\tau} \end{cases}$$

Bu yerda $\vec{\tau} = \dot{\vec{p}}, \vec{v}$ -birlik normal vektor, k esa γ chiziqning ð nuqtadagi egriligi. Shunda

$$\mathrm{II}(\vec{\tau},\vec{\tau}) = (\dot{\vec{\tau}},\vec{n}) = (k\vec{v}, n) = k\cos\theta$$

ni hosil qilamiz.Bu yerda $\theta - \vec{n}$ va $\vec{v}$ vektorlar orasidagi burchak. Endi γ ni $\vec{p} = \vec{p}(t)$ tenglama bilan aniqlasak (bu yerda t -ixtiyoriy parametr), unda t - ni s ning funksiyasi ekanligidan va

$$\vec{p}' = \dot{\vec{p}}\frac{ds}{dt}, \vec{p}'' = \ddot{\vec{p}}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \dot{\vec{p}}\frac{d^2s}{dt^2}$$

tengliklarni hisobga olib

$$\mathrm{II}(\vec{p}',\vec{p}') = (\vec{p}'',\vec{n}) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 (\ddot{\vec{p}},\vec{n}) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k\cos\theta$$

ni hosil qilamiz. Bundan

$$k\cos\theta = \frac{\mathrm{II}(\vec{p}',\vec{p}')}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = \frac{\mathrm{II}(\vec{p}',\vec{p}')}{\mathrm{I}(\vec{p}',\vec{p}')}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikning o‘ng tomoni faqat $\vec{p}'$ vektorga bog’liqligi ko‘rinib turibdi. Agar γ dan boshqa tekis kesim γ' ni olsak, va ular umumiy urinmaga ega (ya’ni bir xil yo‘nalishga ega bo‘lsa), ular uchun yuqoridagi tenglikning o‘ng tomoni bir xildir. Bu formulani teorema shaklida yozamiz.

Xulosa qilib aytganda, sirtlar nazariyasi differensial geometriyaning muhim yo‘nalishlaridan biri bo‘lib, u nafaqat nazariy, balki ko‘plab amaliy sohalarda ham keng qo‘llaniladi. Sirtlarning egriligi, metrik xossalari va lokal-geometrik tuzilishini o‘rganish real obyektlarning shaklini tahlil qilish va modellashtirishda muhim ahamiyat kasb etadi.Birinchidan, sirtlar nazariyasi muhandislik va arxitektura sohasida keng qo‘llaniladi. Masalan, gumbazlar, ko‘priklar, tom konstruksiyalari va turli egri shakldagi inshootlarni loyihalashda sirtlarning egriligi va mustahkamlik xossalari hisobga olinadi. Sferik va parabolik sirtlar yukni bir tekis taqsimlash xususiyatiga ega bo‘lgani uchun qurilishda samarali ishlatiladi. Ikkinchidan, mashinasozlik va aviatsiya sohasida murakkab egri sirtlarni loyihalashda differensial geometriya usullari qo‘llaniladi. Samolyot qanoti, avtomobil kuzovi yoki kema korpusi shaklini aniqlashda sirtning aerodinamik va gidrodinamik xossalari, ya’ni egriligi muhim rol o‘ynaydi. Bu jarayonda kompyuter grafikasi va matematik modellashtirish vositalari bilan birgalikda sirtlar nazariyasidan foydalaniladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1.Narmanov, A. N. (2008). Differensial geometriya asoslari. – Toshkent: O‘qituvchi nashriyoti.

2.Xudoyberdiyev, G‘, Jo‘rayev, T. (2012). Differensial geometriya va topologiya. – Toshkent: Universitet nashriyoti.

3.To‘rayev, R. (2015). Geometriya (II qism). – Toshkent: Fan va texnologiya.

4.Rasulov, A. (2010). Differensial geometriya masalalari to‘plami. – Toshkent: Tafakkur nashriyoti.

Foydalanilgan internet manbalari

6. **Analitik geometriya haqida ma’lumot** // O‘zbek ensiklopedik manbasi: Internet resurs. – URL: https://uzpedia.uz/pedia/analitik_geometriya

7. **Differensial geometriya haqida ma’lumot** // Milliycha ilmiy portali: Internet resurs. – URL: https://milliycha.uz/differentsial-geometriya/