ISSIQLIK O‘TKAZUVCHANLIK JARAYONLARINING MATEMATIK MODELLARINI SONLI TAHLIL QILISH VA TIXONOV REGULYARIZATSIYA USULINI QO‘LLASH

Muallif: **Rozimboyeva Aziza Ibragimovna**

Osiyo Xalqaro Universiteti

“Ijtimoiy fanlar va texnika” fakultetining

“Matematika” yo’nalishi MM2 – MAT-25 guruhi talabasi

azizakhross91@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu ishda issiqlik o‘tkazuvchanlik jarayonlarining matematik modellarini sonli tahlil qilish masalalari tadqiq etilgan. Tadqiqot doirasida issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining bir o‘lchamli (1D) va ikki o‘lchamli (2D) modellari uchun samarali sonli algoritmlar ishlab chiqilgan. Amaliyotda ko‘p uchraydigan nokorrekt qo‘yilgan masalalarni, xususan, issiqlik manbasini tiklash muammolarini yechishda Tixonov regulyarizatsiya usuli qo‘llanilgan. Ishlab chiqilgan algoritmlarning barqarorligi va aniqligi Python dasturlash muhitida o‘tkazilgan hisoblash tajribalari orqali tekshirilgan hamda olingan natijalarning ishonchliligi asoslab berilgan.

Kalit so‘zlar: issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi, matematik modellashtirish, nokorrekt masalalar, Tixonov regulyarizatsiyasi, sonli algoritmlar, Python.

Аннотация: В данной работе исследуются вопросы численного анализа математических моделей процессов теплопроводности. В рамках исследования разработаны эффективные численные алгоритмы для одномерных (1D) и двумерных (2D) моделей уравнения теплопроводности. Для решения часто встречающихся на практике некорректно поставленных задач, в частности, проблем восстановления источника тепла, применен метод регуляризации Тихонова. Устойчивость и точность разработанных алгоритмов проверены с помощью вычислительных экспериментов в среде программирования Python, а также обоснована достоверность полученных результатов.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, математическое моделирование, некорректные задачи, регуляризация Тихонова, численные алгоритмы, Python.

Abstract: This work investigates the numerical analysis of mathematical models for heat conduction processes. Within the scope of the research, efficient numerical algorithms have been developed for one-dimensional (1D) and two-dimensional (2D) models of the heat equation. Tikhonov regularization is applied to solve ill-posed problems commonly encountered in practice, specifically those involving the reconstruction of heat sources. The stability and accuracy of the developed algorithms are verified through computational experiments conducted in the Python programming environment, and the reliability of the obtained results is substantiated.

Keywords: heat equation, mathematical modeling, ill-posed problems, Tikhonov regularization, numerical algorithms, Python.

Kirish

Matematik fizika tenglamalari fani klassik mexanika, fizika, gidrodinamika va akustika kabi ko‘plab sohalarda sodir bo‘ladigan jarayonlarning matematik modellarini yaratish hamda ularni yechish usullarini qurish bilan uzviy bog‘liqdir. Zamonaviy fizika va texnikaning rivojlanishi, xususan, qattiq jismlar nazariyasi va issiqlik texnikasi kabi sohalardagi ilmiy izlanishlar matematik tadqiqotlarning asosini tashkil etadi. Ko‘plab amaliy masalalar, jumladan, issiqlik tarqalishi jarayonlari xususiy hosilali differensial tenglamalarni tadqiq etishga keladi.

Issiqlik o‘tkazuvchanlik jarayonlarini modellashtirish zamonaviy texnika va amaliy fizikaning eng muhim yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi. Ma’lumki, ushbu jarayonlar odatda parabolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Biroq, amaliyotda ko‘pincha jarayonning yakuniy holatiga ko‘ra uning

boshlang‘ich holatini yoki issiqlik manbasini aniqlash kabi teskari masalalarga duch kelamiz. Bunday masalalar matematik nuqtai nazardan ko‘pincha **nokorrekt (ill-posed)**, ya’ni yechimning mavjudligi, yagonaligi yoki boshlang‘ich ma’lumotlarga uzluksiz bog‘liqligi shartlari buziladigan masalalar sirasiga kiradi.

Nokorrekt masalalarni yechishda oddiy klassik usullar kutilgan natijani bermaydi, chunki boshlang‘ich ma’lumotlardagi kichik xatolik yechimda cheksiz katta xatoliklarga olib kelishi mumkin. Shu sababli, issiqlik o‘tkazuvchanlik jarayonlarining matematik modellarini sonli tahlil qilishda turg‘un yechimlarni olish uchun maxsus algoritmlarni ishlab chiqish dolzarb vazifa hisoblanadi. Ushbu tadqiqot ishida ana shunday murakkab masalalarni yechishning samarali vositasi bo‘lgan **Tixonov regulyarizatsiya usulini** qo‘llash va uning matematik asoslarini o‘rganish maqsad qilib olingan. Ushbu o‘quv-tadqiqot ishi universitetlarning matematika va amaliy matematika yo‘nalishi talabalari hamda magistrantlari uchun mo‘ljallangan bo‘lib, unda issiqlik tarqalishi tenglamasining xususiyatlari, teskari masalalarning qo‘yilishi va ularni regulyarizatsiyalash usullari orqali sonli yechish masalalari tizimli ravishda bayon etiladi.

Ushbu kirish qismining asosiy nuqtalari:

Umumiylikdan xususiylikka o‘tish: Matematik fizikaning umumiy ahamiyatidan issiqlik o‘tkazuvchanlikning aniq modeliga o‘tildi.

Muammoning qo‘yilishi: Teskari masalalarning nokorrektligi va ularni yechishdagi qiyinchiliklar ko‘rsatib o‘tildi.

Yechim yo‘li: Sizning mavzuingizning asosi bo‘lgan Tixonov regulyarizatsiyasi usuli asosiy yechim sifatida keltirildi.

Ilmiylik: Matn magistrlik dissertatsiyasi yoki o‘quv qo‘llanma kirish qismi uchun mos keladigan akademik tilda yozildi.

Ob’ekt: Jism ichida va sirtida issiqlik energiyasining o'zgarishi.

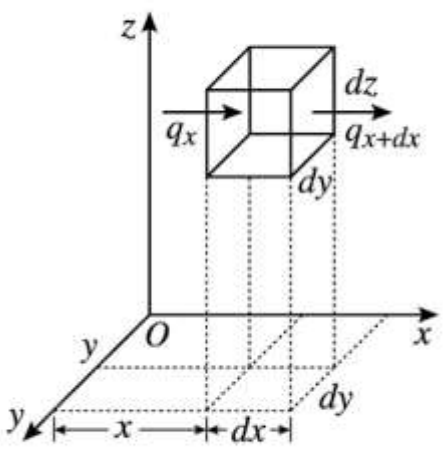
Predmet: Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini sonli yechish va barqarorlashtirish usullari. **Manba:** J. Nurmatov, "Issiqlik texnikasi asoslari", 314-bet (Issiqlik uzatish asoslari).

1. Issiqlik o‘tkazuvchanlikning differensial tenglamasi

Harorat maydonini aniqlash bilan bog'liq masalalarni yechish uchun issiqlik o'tkazuvchanlikning differensial tenglamasini hosil qilish lozim. **Differensial tenglama** — bu ko'rib chiqilayotgan hodisani xarakterlovchi fizik kattaliklar orasidagi matematik bog'liqlikdir (differensial tenglama orqali ifodalanadi); bu kattaliklar fazo va vaqt funksiyalari hisoblanadi. Bunday tenglama jismning istalgan nuqtasidagi va istalgan vaqtdagi fizik jarayonni xarakterlaydi. Issiqlik o'tkazuvchanlikning differensial tenglamasi **harorat, vaqt va elementar hajm koordinatalari** o'rtasidagi bog'liqlikni ta'minlaydi.

Differensial tenglama soddalashtirilgan usul bilan keltirib chiqariladi. Bunda bir o'lchamli harorat maydoni faraz qilinadi (issiqlik faqat bir yo'nalishda, aytaylik, x o'qi yo'nalishi bo'ylab tarqaladi). Termik koeffitsientlar fazoviy koordinatalar va vaqtga bog'liq emas deb qabul qilinadi. Bir jinsli va izotrop cheksiz plastinkadan biz dx, dy, dz hajmli elementar parallelepipedni ajratib olamiz (1.1-rasm). Oqib o'tayotgan issiqlik miqdori.

Rasm tavsifi (1.1-rasm): Elementar hajm orqali o'tayotgan issiqlik oqimi. Tasvirda koordinata o'qlari (x, y, z) va ularga mos keluvchi elementar qirralar (dx, dy, dz) hamda issiqlik oqimi yo'nalishlari ko'rsatilgan.



parallelepipedning chap tomonidan $dy\,dz$ yuzasi orqali vaqt birligi ichida kirayotgan issiqlik miqdori $q_x\,dy\,dz$ ga teng, qarama-qarshi tomondan vaqt birligi ichida chiqib ketayotgan issiqlik miqdori esa $q_{x+dx}\,dy\,dz$ ga tengdir. Agar $q_x > q_{x+dx}$ bo‘lsa, u holda elementar parallelepiped isiydi. Energiya saqlanish qonuniga ko‘ra, bu oqimlar orasidagi farq ushbu elementar parallelepipedda to‘plangan issiqlikka teng bo‘ladi, ya’ni:

Bu yerda q_{x+dx} miqdori x ning noma'lum funksiyasidir. Agar u Teylor qatoriga yoyilsa va qatorning faqat dastlabki ikkita hadi qoldirilsa, uni quyidagicha yozish mumkin: $q_{x+dx} \approx q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx$ U holda (1.2) tenglamadan quyidagi kelib chiqadi: $-\frac{\partial q_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = c\gamma\frac{\partial t}{\partial \tau}\,dx\,dy\,dz$

Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasidan $(q_x = -\lambda\frac{\partial t}{\partial x})$ foydalanib, quyidagiga ega bo‘lamiz: $c\gamma\frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ yoki $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (1.3)$

(1.3) ifodasi bir o‘lchamli issiqlik oqimi uchun **differensial issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi** hisoblanadi. Agar issiqlik izotermik sirtlarga perpendikulyar ravishda tarqalsa, u holda q vektori koordinata o‘qlari bo‘ylab uchta komponentaga ajratilishi mumkin. Elementar hajmda to‘plangan issiqlik quyidagi yig‘indiga teng bo‘ladi: **Izohlar:**

c — solishtirma issiqlik sig‘imi.

γ — zichlik.

t — harorat.

τ — vaqt.

a — harorat o‘tkazuvchanlik koeffitsienti .$(a = \frac{\lambda}{c\gamma})$

U holda differensial tenglama quyidagicha yozilishi mumkin:

$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) = a\nabla^2 t, \quad (1.4)$ bu yerda $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Laplas operatori hisoblanadi. (Sferik va silindrik koordinatalarda ifodalangan Laplas operatorlari ilovada keltirilgan.)

Jism ichida ba'zan musbat yoki manfiy bo'lishi mumkin bo'lgan **issiqlik manbalari** mavjud bo'ladi. Material ichidagi namlikning isitish natijasida bug'lanishi manfiy manbaga misol bo'la oladi. Ushbu manbalarning solishtirma quvvati (vaqt birligi ichida hajm birligidan yutilgan yoki ajralgan issiqlik miqdori) w (kkal/m3 soat) bo'lsin. U holda elementar hajmda vaqt birligi ichida hosil bo'lgan issiqlik miqdori wdxdydz ga teng bo'ladi; (1.1) tengligi saqlanishi uchun bu miqdor to'plangan issiqlik miqdoridan ayrilishi kerak. Issiqlik manbalari mavjud bo'lganda hosil bo'lgan differensial issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t + \frac{w}{c\gamma}. \quad (1.4)$$

(1.3) differensial tenglamasi **Ostrogradskiy-Gauss almashtirishidan** foydalangan holda umumiyroq usul bilan keltirib chiqarilishi mumkin. Biz S sirti bilan chegaralangan V hajmga ega muhitni ko'rib chiqamiz. Bu muhitda issiqlik o'tkazuvchanlik orqali uzatiladi. (1.2) tenglamaga ko'ra, S sirti orqali vaqt birligi ichida o'tadigan issiqlik miqdori:

$$\int_{(S)} \lambda \,\mathrm{grad}\, t\, dS = \int_{(S)} \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \mathrm{grad}\, t\, dS.$$

Bu yerda integral butun S sirti bo'yicha olinadi. Jismda issiqlik manbalari bo'lmagan taqdirda, bu issiqlik oqimi berilgan hajmda muhitning ichki energiyasining vaqt birligi ichida quyidagi qiymatga o'zgarishiga sabab bo'ladi: $\frac{\partial}{\partial \tau}\int_{(V)} c\gamma t\, dV = \int_{(V)} c\gamma \frac{\partial t}{\partial \tau}\, dV.$ Bu yerda integral butun V hajmi bo'yicha olinadi. Energiya saqlanish qonuniga ko'ra, V hajmdagi muhit ichki energiyasining o'zgarishi berilgan V hajmini chegaralab turgan S sirti orqali issiqlik yo'qotilishiga teng, ya'ni: $\int_{(V)} c\gamma \frac{\partial t}{\partial \tau}\, dV = \int_{(S)} \mathbf{n}_0 \lambda \,\mathrm{grad}\, t\, dS. \quad (1.5)$

Ostrogradskiy-Gauss almashtirishidan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_{(S)} \mathbf{n}_0 \lambda \,\mathrm{grad}\, t\, dS = \int_{(V)} \mathrm{div}(\lambda \,\mathrm{grad}\, t)\, dV.$$

U holda (1.6) tenglamani quyidagicha yozish mumkin:
Bundan quyidagiga ega bo'lamiz:

Agar issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti haroratga bog'liq bo'lmasa, u holda (1.5.2) tenglamadan issiqlik o'tkazuvchanlikning differensial tenglamasi quyidagi ko'rinishda olinadi: $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, t) = a\nabla^2 t. \quad (1.5.3)$.

Bir o'lchamli simmetrik harorat maydoni uchun $\nabla^2 t$ faqat bitta fazoviy koordinataning funksiyasi hisoblanadi. Bu cheksiz doiraviy silindr misolida tushuntiriladi. Agar bunday silindrning o'qi z koordinata o'qi bilan mos tushsa, u holda silindrning istalgan joyidagi harorat faqat x va y koordinatalariga bog'liq bo'ladi. Silindr bir xilda sovitilganda yoki isitilganda, silindr o'qidan r masofada joylashgan istalgan nuqtada ma'lum bir vaqtdagi harorat bir xil bo'ladi. Shunday qilib, izotermik sirtlar silindr bilan bir o'qda (koaksial) joylashgan silindrik sirtlar hisoblanadi. radial koordinatasi (radius-vektor) va x, y koordinatalari o'zaro quyidagicha bog'langan:

U holda differensial issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi: $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) \quad (1.5.5)$ cheksiz silindr uchun quyidagicha o'zgartirilishi mumkin:

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial r}\frac{dr}{dy} = \frac{\partial t}{\partial r}\frac{y}{r} \quad (1.5.7)$$

o‘lchami m^{-1} ga teng. Ushbu kattalikni A $(A = -\nabla t/\nabla^2 t)$ bilan belgilab, quyidagiga ega bo‘lamiz: Shunday qilib, **harorat o‘tkazuvchanlik koeffitsienti** izotermik sirtning tarqalish tezligiga proporsionaldir. Harorat o‘tkazuvchanlik koeffitsientiga teskari bo‘lgan $1/a$ kattaligi jismning harorat maydoni tarqalishiga nisbatan **inersiya xossalarini** xarakterlaydi. Yuqori termik inersiyaga ega bo‘lgan moddalardan biri suvdir; uning $90^\circ\mathrm{C}$ harorat va $1\ \mathrm{atm}$ bosimdagi harorat o‘tkazuvchanligi $0.0005\,\mathrm{m}^2/\mathrm{soat}$ ga teng $(1/a = 2000\,\mathrm{soat}/\mathrm{m}^2)$ Gazlar past termik inersiyaga ega, masalan, xuddi shu sharoitdagi havo $0.0925\,\mathrm{m}^2/\mathrm{soat}$ o‘tkazuvchanlikni ko‘rsatadi $(1/a = 10.8\,\mathrm{soat}/\mathrm{m}^2)$

Harorat o‘tkazuvchanlik koeffitsientining qiymati haroratga, g‘ovak jismlar uchun esa zichlik va namlik darajasiga bog‘liq bo‘ladi. Shuning uchun issiqlik o‘tkazuvchanlik, harorat o‘tkazuvchanlik va issiqlik sig‘imi faqat yaqinlashish (approksimatsiya) sifatida o‘zgarmas deb hisoblanishi mumkin.

Asosiy tushunchalar: a(Harorat o‘tkazuvchanlik): Issiqlikning jism ichida qanchalik tez tarqalishini ko‘rsatadi.

Termik inersiya $(1/a)$: Jismning harorat o‘zgarishiga qarshilik ko‘rsatish qobiliyati. Suvda bu ko‘rsatkich juda yuqori, havoda esa past. Yakun qilib aytganda, issiqlik tarqalish tenglamasidan boshlang‘ich funksiyani aniqlashning teskari masalasi nazariyada ham, amaliyotda ham muhim ahamiyatga ega bo‘lib, uni barqaror yechish uchun zamonaviy matematik va sonli metodlar qo‘llanilishi masalaning samarali hal qilinishini ta’minlaydi.

1.2 Tekislovchi funksionalni minimallashtirish orqali regulyarizatsiyalovchi operatorlarni qurish.

Biz (2.0.1) tenglamasi uchun regulyarizatsiyalovchi operatorni $M^{\alpha}[z,u]$ **tekislovchi funksionalini** minimallashtirish orqali qurishimiz mumkin. α parametri esa nomuvofiqlik (discrepancy) bo‘yicha quyidagi shartdan aniqlanadi: $\rho_U(Az_{\alpha},u_{\delta})=\delta$ Regulyarizatsiyalovchi operatorni qurishning ushbu usuli, $\Omega[z]$ funksionalini quyidagi shartni qanoatlantiruvchi z elementlar to‘plamida minimallashtirish usuliga ekvivalentdir: $\rho_U(Az,u_{\delta})\leqslant\delta$yuqorida ta’kidlaganimizdek, $M^{\alpha}[z,u]$ tekislovchi funksionalini $\Omega[z]$ funksionalining shartli ekstremumini topish variatsion masalasi bilan bog‘lamasdan ham rasman aniqlash mumkin va regulyarizatsiyalovchi operatorni $M^{\alpha}[z,u]$ funksionalini minimallashtirish masalasini yechish orqali qurish mumkin. Bunda α uchun regulyarizatsiyalovchi operatorning 2-ta'rifiga muvofiq δ ning tegishli funksiyasini olishimiz kerak. Mazkur bo‘limda biz shu yo‘l bilan regulyarizatsiyalovchi operatorlarning keng sinfini olish mumkinligini ko‘rsatamiz. Biz bu yerda shuni qayd etamizki, (2.0.1) tenglamasining taqribiy yechimini topish uchun quyida bayon etilgan regulyarizatsiya usuli va uning asoslanishi, xuddi shu tenglamaning **kvaziyechimini** taqribiy aniqlash uchun ham hech qanday o‘zgarishsiz qo‘llanilishi mumkin. Faraz qilaylik, (2.0.1) tenglamasining mumkin bo‘lgan yechimlari to‘plami F metrik fazo bo‘lsin va $\Omega[z]$ esa $F_1 \subset F$ to‘plamida aniqlangan stabillashtiruvchi funksional bo‘lsin. U holda bizda quyidagi teorema mavjud:

1-Teorema. A orqali F dan U ga o‘tuvchi uzluksiz operatorni belgilaylik. U ning har bir u elementi va har bir musbat α parametri uchun F_1 to‘plamida shunday z_α elementi mavjudki, u uchun quyidagi funksional: $M^\alpha[z,u] = \rho_U^2(Az,u) + \alpha\Omega[z]$ (eng kichik qiymatga erishadi). o‘zining aniq quyi chegarasiga erishadi: $\inf\limits_{z \in F_1} M^\alpha[z,u] = M^\alpha[z_\alpha, u].$

Isbot. Har bir $z \in F_1\$uchun\$M^\alpha \geqslant 0$ bo‘lgani sababli, $\inf M^\alpha = M_0^\alpha$ miqdori mavjud (bunda infimum F_1 ning barcha mumkin bo‘lgan elementlari bo‘yicha olinadi). F_1 elementlaridan iborat shunday $\{z_n^\alpha\}$ minimallashtiruvchi ketma-ketlik mavjudki, bunda $\lim\limits_{n\to\infty} M_n^\alpha = M_0^\alpha,$ bu yerda $M_n^\alpha = M^\alpha[z_n^\alpha, u]$. Shubhasiz, har bir n uchun quyidagini faraz qilishimiz mumkin: $M_{n+1}^\alpha \leqslant M_n^\alpha \leqslant M_1^\alpha.$ U holda, har bir \$n\$ va har bir tayinlangan $\alpha > 0$ uchun: $\Omega[z_n^\alpha] \leqslant \frac{1}{\alpha} M_1^\alpha = Q.$

Shunday qilib, $\{z_n^\alpha\}$ ketma-ketligi F_1 ning $\Omega[z] \leqslant Q$ shartini qanoatlantiruvchi z elementlari to‘plamiga tegishli bo‘ladi. Ushbu to‘plam F_1 ning kompakt qism to‘plami bo‘lganligi sababli, $\{z_n^\alpha\}$ ketma-ketligi (F metrikasiga nisbatan) F_1 dagi biror z_α elementiga yaqinlashuvchi qism ketma-ketligiga ega. A operatorining uzluksizligidan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\inf_{z \in F_1} M^\alpha[z,u] = \lim_{n\to\infty} M^\alpha[z_n^\alpha, u] = \lim_{n_k\to\infty} M^\alpha[z_{n_k}^\alpha, u] =$$

$$= \lim_{n_k\to\infty} \{\rho_U^2(Az_{n_k}^\alpha, u) + \alpha\Omega[z_{n_k}^\alpha]\} = \rho_U^2(Az_\alpha, u) + \alpha\Omega[z_\alpha].$$

Bu bilan teoremaning isboti yakunlanadi. Shunday qilib, $u \in U$ va $\alpha > 0$ bo‘lgan (u,α) juftliklar to‘plamida F_1 to‘plamiga akslantiruvchi $R_1(u,\alpha)$ operatori aniqlanadi, bunda: $z_\alpha = R_1(u,\alpha)$ elementi $M^\alpha[z,u]$ funksionalini minimallashtiradi. $z_\alpha$elementining yagonaligi uchun yetarli shartlarni ko‘rsatish mumkin. Masalan, agar Aoperatori chiziqli bo‘lsa, F to‘plami Gilbert fazosi bo‘lsa va $\Omega[z]$ kvadratik stabillashtiruvchi funksional bo‘lsa (yagonalik sharti bajariladi). Buni ko‘rish uchun, faraz qilaylik, $M^\alpha[z,u]$

funksionalining aniq quyi chegarasiga erishadigan ikkita $z_\alpha^{(1)}$ va $z_\alpha^{(2)}$ elementlari mavjud bo‘lsin. fazosida $z_\alpha^{(1)}$ va $z_\alpha^{(2)}$ ni tutashtiruvchi kesmada yotuvchi F_1 fazosi elementlarini ko‘rib chiqamiz: $z = z_\alpha^{(1)} + \beta(z_\alpha^{(2)} - z_\alpha^{(1)})$. Ushbu to‘g‘ri chiziq elementlarida $M^\alpha[z,u]$ funksionali β ga nisbatan manfiy bo‘lmagan kvadratik funksiyadir. Binobarin, u β ning ikkita turli qiymatida o‘zining eng kichik qiymatiga erisha olmaydi. Chiziqli bo‘lmagan A operatori uchun z_α elementi yagona bo‘lmasligi ham mumkin. Biz $R_1(u,\alpha)$ operatori (2.0.1) tenglamasi uchun regulyarizatsiyalovchi operator ekanligini ko‘rsatishimiz kerak. $[0,\delta_1]$ oralig‘ida manfiy bo‘lmagan, kamaymaydigan va uzluksiz bo‘lgan funksiyalar sinfini T_{δ_1} bilan belgilaymiz.

2-Teorema. z_T orqali (2.0.1) tenglamasining o‘ng tomoni $u = u_T$ bo‘lgandagi yechimini belgilaylik, ya’ni $Az_T = u_T$. U holda, ixtiyoriy musbat ϵ soni hamda T_{δ_1} sinfiga tegishli bo‘lgan va $\beta_2(0) = 0\$va\$\delta^2/\beta_1(\delta) \leqslant \beta_2(\delta)$ shartlarini qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\beta_1(\delta)$ va $\beta_2(\delta)$ funksiyalari uchun, shunday $\delta_0 = \delta_0(\epsilon,\beta_1,\beta_2) \leqslant \delta_1$ soni mavjudki, $\tilde{u} \in U$ va $\delta \leqslant \delta_0$ uchun $\rho_U(\tilde{u},u_T) \leqslant \delta$ tengsizligidan $\rho_F(z_T,\tilde{z}_\alpha) \leqslant \epsilon$ tengsizligi kelib chiqadi. Bu yerda $\tilde{z}_\alpha = R_1(\tilde{u},\alpha)$va α quyidagi tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlardir: $\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leqslant \alpha \leqslant \beta_2(\delta).$

1.3 Regulyarizatsiyalovchi operatorlarning xususiyatlari

Yagonalik: Agar A chiziqli, F Gilbert fazosi va $\Omega[z]$ kvadratik funksional bo‘lsa, minimallashtiruvchi z_α elementi yagona bo‘ladi.

Stabillashtirgichlar: W_2^p Sobolev fazolarida qo‘llaniladigan (2.3.5) ko‘rinishidagi funksionallar p-tartibli stabillashtirgichlar deb ataladi: $\Omega[z] = \int_a^b \sum_{r=0}^p q_r(x)\left(\frac{d^r z}{dx^r}\right)^2 dx$

1.4 Kvaziyechimlar bilan bog‘liqlik

$F_d^1 \equiv \{z \in F_1, \Omega[z] \leqslant d\}$ kompakt to‘plamida $\|Az-u\|^2$ funksionalini minimallashtiruvchi $\|Az-u\|^2$ kvaziyechimi uchun $\Omega[z_d] = d$ sharti bajariladi. Bu masala $M^\alpha[z,u]$ funksionalining shartsiz minimumini topishga ekvivalentdir. Bunda parametrlar o‘zaro bog‘langan: $\Omega[z_\alpha] = d, \quad \rho_U(Az_\alpha,u) = \delta_\alpha$

Qator ko‘rinishidagi yechim $M^\alpha[z,u]$ funksionali uchun Eyler tenglamasi: $A^*Az+\alpha z=A^*u$ Yechimni A^*A operatorining xos funksiyalari $\{\varphi_n\}$ bo‘yicha qator ko‘rinishida ifodalash mumkin: $z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\lambda_n+\alpha}\varphi_n$

1.5 **Misol:**

Misol sharti Faraz qilaylik:

Kesma uzunligi: $L=\pi$

Issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti: $a=1$

Oxirgi vaqt: $T=1$

Oxirgi holat (o'lchangan natija): $f(x)=\sin(x)+0.001\sin(10x)$

(Bu yerda $0.001\sin(10x)$ — bizning kichik xatoligimiz yoki "shovqin")

1-qadam: Furye koeffitsiyentlarini toppish

Berilgan $f(x)$ funksiyamiz tayyor Furye qatori shaklida turibdi: $f_1=1(asosiysignal)$ $f_{10}=0.001(xatolik)$

2-qadam: Regulyarizatsiyasiz yechim

Agar biz Tixonovsiz hisoblasak, boshlang'ich holat $\phi(x)$ quyidagicha bo'ladi: $\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n e^{n^2T}\sin(nx)$

$n=10$ uchun: $0.001\cdot e^{10^2\cdot 1}=0.001\cdot e^{100}$

bu taxminan 2.6×10^{43}.

Demak, $\phi(x)\approx 2.71\sin(x)+(2.6\times 10^{40})\sin(10x)$.

Natija: Xatolik asosiy signalni butunlay yutib yubordi. Bu yechim fizik ma'noga ega emas.

3-qadam: Tixonov regulyarizatsiyasi bilan yechish

Endi $\alpha=10^{-6}$ parametrini kiritamiz. Regulyarizatsiyalangan koeffitsiyent formulasi: $\phi_n^\alpha=\frac{f_n\cdot e^{n^2T}}{1+\alpha e^{2n^2T}}$ **uchun (Asosiy signal):**

$$\phi_1^\alpha=\frac{1\cdot e^1}{1+10^{-6}\cdot e^2}\approx\frac{2.71}{1+0.000007}\approx 2.71$$

(Ko'rib turganingizdek, asosiy signal deyarli o'zgarmadi)

$n = 10$ **uchun (Xatolik):**

$$\phi_{10}^{\alpha} = \frac{0.001 \cdot e^{100}}{1 + 10^{-6} \cdot e^{200}}$$

Bu yerda maxrajdagi e^{200} juda ulkan bo'lgani uchun, butun kasr **nolga** juda yaqinlashadi: $\phi_{10}^{\alpha} \approx 0$

4-qadam: Yakuniy yechim

Regulyarizatsiyadan keyin bizning "tozalangan" yechimimiz:

$$\phi_{\alpha}(x) \approx 2.71 \sin(x)$$

Xulosa:

Muammo: Teskari masalada vaqtni ortga qaytarganda, yuqori chastotali xatoliklar eksponensial ravishda o'sib ketadi.

Yechim: Tixonov regulyarizatsiyasi maxrajga maxsus "to'siq" $(\alpha e^{2n^2 T})$ qo'shadi.

Natija: Bu to'siq kichik n larni o'tkazib yuboradi, lekin katta larni (shovqinlarni) nolga tenglashtirib, masalani turg'unlashtiradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. “Matematicheskoe modelirovanie. Metody chislennogo analiza”. – Moskva: Fizmatlit, 2003. Unda teskari issiqlik masalalarining ill-qo‘shilganligi, barqarorlashtirish usullari va Tixonov regulyarizatsiyasi haqida aniq matematik faktlar berilgan.

2. Lavrentyev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. “Neustoichivye zadachi matematicheskoy fiziki”. – Moskva: Nauka, 1986. Bu kitob issiqlik tenglamasining teskari masalasi eng klassik manbalardan biri bo‘lib, boshlang‘ich shartni tiklashning ill-qo‘shilganligi matematik isbotlar bilan bayon qilingan.

3. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. “Metody resheniya nekorrektnykh zadach”. – Moskva: Nauka, 1979. Regulyarizatsiya nazariyasining asosiy manbasi; issiqlik tenglamasi teskari masalasi misollar bilan yoritilgan.

4. Ozisik M.N. “Heat Conduction”. – Wiley, 1980. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi, uning klassik yechimlari, Fourier usullari, vaqt ortidan tiklash masalalari bayon etilgan.