

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ОБЛАСТИ.-

Зулхумор Абдукахарова Абдихалиловна

Ташкентский международный
академический лицей Вестминстер

Преподаватель математики.

Аннотация: В данной статье рассматриваются теоретические основы и практические методы вычисления площадей криволинейных областей с использованием определённого интеграла. Анализируются основные способы нахождения площади фигур, ограниченных графиками функций, осью абсцисс и прямыми линиями. Особое внимание уделяется геометрическому смыслу определённого интеграла, его роли в математическом анализе и практическому применению при решении инженерных, физических и экономических задач. Приведены примеры вычисления площадей различных криволинейных фигур, рассмотрены особенности выбора границ интегрирования и способы повышения точности вычислений. Исследование показывает, что интегральное исчисление является эффективным инструментом для решения широкого круга прикладных задач, связанных с определением площадей сложных геометрических объектов.

Ключевые слова: криволинейная область, площадь фигуры, определённый интеграл, математический анализ, функция, график функции, интегрирование, границы интегрирования, геометрический смысл интеграла, вычислительные методы.

Одной из важнейших задач математического анализа является вычисление площадей плоских фигур, ограниченных различными линиями. Если площадь прямоугольника, треугольника или круга можно определить с помощью известных геометрических формул, то для фигур сложной формы применение элементарной

геометрии оказывается недостаточным. В таких случаях возникает необходимость использования методов интегрального исчисления.

Понятие определённого интеграла стало одним из крупнейших достижений математики и открыло новые возможности для исследования различных физических, технических и экономических процессов. Благодаря интегральному исчислению появилась возможность находить площади фигур, ограниченных произвольными кривыми, вычислять объёмы тел, длины дуг, работу переменной силы и многие другие величины. В современных условиях изучение методов вычисления площадей криволинейных областей имеет не только теоретическое, но и практическое значение. Эти методы широко используются в строительстве, машиностроении, архитектуре, компьютерной графике, экономике и естественных науках. Поэтому исследование особенностей вычисления площадей криволинейных областей является актуальной задачей математического образования.

Понятие криволинейной области тесно связано с графиками функций. Криволинейной областью называется часть плоскости, ограниченная одной или несколькими кривыми линиями. Для нахождения площади такой области используются методы интегрального исчисления, основанные на разбиении фигуры на бесконечно малые элементы. Геометрический смысл определённого интеграла заключается в том, что он позволяет определить площадь фигуры, ограниченной графиком непрерывной функции, осью абсцисс и прямыми $x=a$ и $x=b$. Если функция принимает неотрицательные значения на рассматриваемом промежутке, то площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Данная формула является фундаментальной в математическом анализе и лежит в основе большинства задач на вычисление площадей криволинейных фигур. Для понимания принципа вычисления площади рассмотрим процесс разбиения фигуры на множество узких прямоугольников. Ширина каждого прямоугольника стремится

к нулю, а сумма их площадей приближается к истинной площади фигуры. В пределе эта сумма превращается в определённый интеграл. Такой подход позволяет получать точные результаты даже для фигур самой сложной формы. Важным этапом решения задач является правильное определение границ интегрирования. Границы выбираются исходя из точек пересечения кривых, ограничивающих исследуемую область. Ошибка при определении этих точек может привести к неверному результату вычислений. Поэтому перед нахождением интеграла необходимо выполнить тщательный анализ графиков функций.

Рассмотрим случай, когда область ограничена графиком функции , осью абсцисс и прямыми и . Тогда площадь определяется следующим образом:

$$S = \int_0^2 x^2 dx$$

После интегрирования получаем:

$$S = x^3/3 \Big|_0^2 = 8/3$$

Следовательно, площадь рассматриваемой криволинейной области равна 8/3 квадратных единиц. На практике часто встречаются задачи, в которых область ограничена двумя функциями. Пусть заданы функции и , причём на рассматриваемом промежутке функция расположена выше функции . Тогда площадь области между графиками определяется формулой:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Этот метод широко применяется при исследовании различных математических моделей и позволяет находить площади между сложными кривыми.

Особое значение вычисление площадей криволинейных областей имеет в инженерных расчётах. При проектировании деталей машин, строительных конструкций и гидротехнических сооружений необходимо определять площади сложных элементов. Использование интегральных методов обеспечивает высокую точность расчётов и способствует повышению надёжности проектируемых

объектов. В экономике определённый интеграл применяется для анализа совокупных затрат, доходов и прибыли. Многие экономические показатели представляются в виде функций, графики которых образуют криволинейные области. Вычисление площади таких областей позволяет получать важную информацию для принятия управленческих решений.

Современные компьютерные технологии значительно расширили возможности применения интегральных методов. Специализированные математические пакеты позволяют автоматически строить графики функций, находить точки пересечения кривых и вычислять определённые интегралы. Это способствует более эффективному решению сложных научных и инженерных задач. Следует отметить, что методы вычисления площадей криволинейных областей продолжают активно развиваться. Появление новых вычислительных алгоритмов и программных средств позволяет исследовать всё более сложные математические модели и получать результаты с высокой степенью точности. Вычисление площадей криволинейных областей представляет собой важное направление математического анализа, объединяющее теоретические знания и практические методы решения прикладных задач. Освоение данных методов способствует развитию логического мышления, математической культуры и профессиональных компетенций обучающихся.

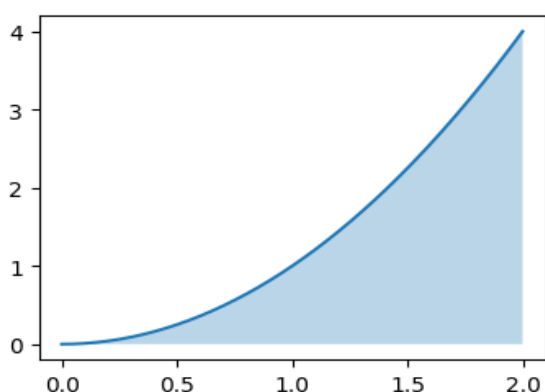


Рисунок 1. Область, расположенная под кривой.

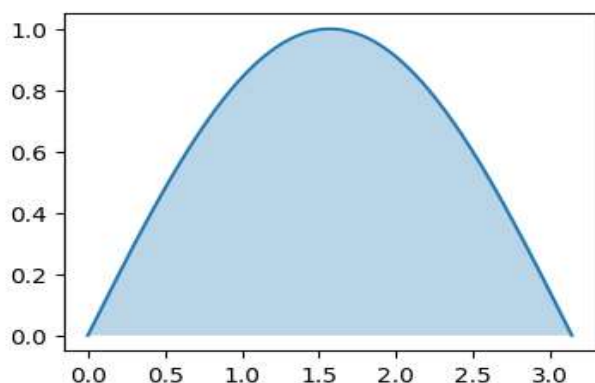


Рисунок 2. Область, ограниченная графиком функции .

Заключение

Вычисление площадей криволинейных областей является одной из фундаментальных задач интегрального исчисления. Использование определённого интеграла позволяет находить площади фигур, ограниченных различными кривыми, с высокой точностью и эффективностью. Рассмотренные методы обладают широкими возможностями практического применения в науке, технике, экономике и других сферах деятельности. Изучение данной темы способствует формированию глубокого понимания математического анализа, развитию аналитического мышления и приобретению навыков решения прикладных задач. В современных условиях интегральные методы остаются важным инструментом математических исследований и инженерных расчётов.

Список использованной литературы

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — Москва: Наука, 2020.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — Москва: АСТ, 2019.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. — Москва: Физматлит, 2021.

4. Никольский С.М. Курс математического анализа. — Москва: Наука, 2020.
5. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. — Москва: Высшая школа, 2019.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. — Москва: Интеграл-Пресс, 2021.
7. Зорич В.А. Математический анализ. — Москва: МЦНМО, 2022.
8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. — Санкт-Петербург: Профессия, 2020.