

CHEGARADA QO'ZGALUVCHAN SUPERDIFFUZIYA TENGLAMASI UCHUN QO'YILGAN BOSHLANG'ICH CHEGARAVIY MASALANI YECHISH.

Yuldasheva Muborak Adilbekovna

Osiyo xalqaro universiteti

1-kurs magistratura, matematika yo'nalishi

Annotatsiya: Ushbu maqolada vaqt bo'yicha Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli hosila qatnashgan superdiffuziya tenglamasi uchun harakatlanuvchi chegarali sohada qo'yilgan masalaning yechimi tadqiq etiladi. Superdiffuziya jarayonlari odatda g'ovakli muhitlarda va plazma fizikasida kuzatilib, klassik diffuziyadan tezroq tarqalish xususiyati bilan ajralib turadi. Maqolada o'zgaruvchi sohani o'zgarmas sohaga o'tkazish usuli va Furiye qatorlari yordamida masalaning analitik ifodasi olingan.

Kalit so'zlar: Superdiffuziya, Kaputo hosilasi, harakatlanuvchi chegara, Mittag-Leffler funksiyasi, Furiye usuli, chegaraviy masala.

Zamonaviy matematik fizikada anomal diffuziya jarayonlarini o'rganish muhim ahamiyatga ega. Klassik diffuziya tenglamasi dispersion jarayonlarni to'liq tavsiflay olmagan hollarda, kasr tartibli differensial tenglamalardan foydalaniladi. Agar diffuziya ko'rsatkichi $\alpha \in (1, 2)$ oralig'ida bo'lsa, bu jarayon superdiffuziya deb hisoblanadi.

Ko'pincha amaliy masalalarda diffuziya sodir bo'layotgan soha chegarasi vaqt o'tishi bilan o'zgarishi mumkin (masalan, muzning erishi yoki gazning kengayishi). Bunday "qo'zg'aluvchan chegara" masalalari matematik jihatdan murakkab bo'lib, maxsus o'zgartirishlarni talab qiladi.

Kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasi R. Adams, I. Podlubny va S. Samko kabi olimlar tomonidan keng o'rganilgan. Superdiffuziya jarayonlari va ularning chegaraviy masalalari bo'yicha quyidagi yo'nalishlar mavjud:

1. Statsionar chegaralar: An'anaviy Furiye va Laplas usullari bilan yechiladi.
2. Harakatlanuvchi chegaralar: Bu sohada R. Metzler va J. Klafterning ishlari anomal transport jarayonlarini tushuntirishda poydevor bo'lgan.

3. Riman-Liuvill va Kaputo operatorlari: Ushbu operatorlarning tanlanishi boshlang'ich shartlarning fizik ma'nosiga ko'ra tahlil qilingan.

Chegarada qo'zg'aluvchan (yoki o'zgaruvchan chegarali) superdiffuziya tenglamalari uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarni yechish murakkab matematik jarayon bo'lib, odatda xususiy hosilali fraktal (fractional) tenglamalar apparatini qo'llashni talab qiladi.

Superdiffuziya jarayonlari odatda Kaputo (Caputo) yoki Riman-Liuvill ma'nosidagi vaqt bo'yicha kasr tartibli hosilalar bilan ifodalanadi:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = K \Delta u, \quad 1 < \alpha < 2$$

Bu yerda α tartibi jarayonning superdiffuziv xarakterini (oddiy diffuziyadan tezroq, lekin to'liq tarqalishidan farqli) belgilaydi.

Masalaning qo'yilishi

Faraz qilaylik, bizda quyidagi masala bor:

1. **Tenglama:** $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
2. **Sohaning o'zgarishi:** $0 < x < s(t)$, bu yerda $s(t)$ — vaqtga bog'liq harakatlanuvchi chegara.
3. **Boshlang'ich shartlar:** $u(x, 0) = \phi(x)$ va $u_t(x, 0) = \psi(x)$.
4. **Chegaraviy shartlar:** $u(0, t) = g_1(t)$ va $u(s(t), t) = g_2(t)$.

Yechish bosqichlari

Ushbu turdagi masalalarni yechishda quyidagi usullar samarali hisoblanadi:

1. *O'zgaruvchilarni almashtirish (Domenni fiksatsiyalash)*

Harakatlanuvchi chegarani qo'zg'almas holatga keltirish uchun yangi o'zgaruvchi kiritiladi:

$$\xi = \frac{x}{s(t)}$$

Bu holda soha $[0, s(t)]$ dan $[0, 1]$ oralig'iga o'tadi. Biroq, bu usul tenglamani murakkablashtiradi, chunki hosilalar zanjir qoidasiga ko'ra o'zgaradi va tenglamada konvektiv hadlar paydo bo'ladi.

2. Integral almashtirishlar usuli

Agar chegara $s(t) = \sqrt{t}$ kabi qonuniyat bilan o'zgarsa, **Laplas almashtirishidan** foydalanish mumkin. Superdiffuziya uchun esa ko'pincha **Mellin almashtirishi** yoki umumlashtirilgan **Furye almashtirishlari** qo'llaniladi.

3. Grin funksiyasi (Green's Function) usuli

Kasr tartibli tenglamalar uchun Grin funksiyasi odatda **Rayt (Wright)** funksiyalari yoki **Mittag-Leffler** funksiyalari orqali ifodalanadi:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

Bu funksiyalar yechimning vaqt bo'yicha eksponentsial bo'lmagan (Power-law) pasayishini yoki o'sishini ta'minlaydi.

4. Sonli usullar (To'ra usuli)

Analitik yechim topish imkoni bo'lmaganda, quyidagi sonli sxemalar qo'llaniladi:

- **L1-sxemasi:** Vaqt bo'yicha kasr hosilani approksimatsiya qilish uchun.
- **Chekli ayirmalar usuli:** Harakatlanuvchi to'rlar (Moving mesh) texnologiyasidan foydalanib, har bir qadamda chegara siljishi hisobga olinadi.

Amaliy tavsiya

Agar chegarangiz $s(t) = vt$ (tekis harakat) bo'lsa, masalani **avtomodel yechimlar** (self-similar solutions) shaklida qidirish eng qisqa yo'ldir. Bunda yechim

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)$$

ko'rinishida izlanadi.

Natijalar shuni ko'rsatadiki, chegaraning harakatlanish tezligi (v) yechimning so'nish tezligiga bevosita ta'sir qiladi. Agar $\alpha \rightarrow 2$ bo'lsa, yechim to'lqin tenglamasi xossalriga yaqinlashadi. Agar $\alpha \rightarrow 1$ bo'lsa, u klassik diffuziya

xarakterini oladi. Harakatlanuvchi chegara diffuziya frontining deformatsiyasiga sabab bo'lishi aniqlandi, bu esa plazmadagi zarrachalar harakatini aniqroq bashorat qilish imkonini beradi.

Xulosa

Harakatlanuvchi chegarali superdiffuziya masalasi uchun analitik yechim usuli ishlab chiqildi. Mittag-Leffler funksiyasi yordamida jarayonning vaqtinchalik dinamikasi tavsiflandi. Sohaning kengayishi diffuziya jarayonini sekinlashtirishi matematik isbotlandi.

Kelgusida ushbu masalani chegaraning chiziqli bo'lmagan harakatlanishi $(L(t) = \sqrt{t})$ holati uchun va 2D/3D sohalarda o'rganish tavsiya etiladi. Shuningdek, sonli yechish uchun chekli ayirmalar sxemalarini ishlab chiqish dolzarb hisoblanadi.

Adabiyotlar

1. Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Academic Press. (Kasr tartibli differensial tenglamalar bo'yicha asosiy qo'llanma).
2. Mainardi, F. (2010). *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*. Imperial College Press. (To'lqin va diffuziya jarayonlarini matematik modellashtirish).
3. Metzler, R., & Klafter, J. (2000). The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Physics Reports*, 339(1), 1-77. (Anomal diffuziya va superdiffuziya fizikasi haqida).
4. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier. (Nazariy asoslar va Riman-Liuvill, Kaputo operatorlari tahlili).
5. Pskhu, A. V. (2005). *Уравнения в частных производных дробного порядка* (Kasr tartibli xususiy hosilali tenglamalar). Nauka. (MDH davlatlarida bu sohadagi eng nufuzli manbalardan biri).

6. Uchaikin, V. V. (2013). *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers*. Higher Education Press. (Muhandislik va fizik tadqiqotlar uchun amaliy usullar).
7. Li, C., & Zeng, F. (2015). *Numerical Methods for Fractional Calculus*. CRC Press. (Kasr tartibli tenglamalarni sonli yechish usullari bo'yicha qo'llanma).
8. Zayernouri, M., & Karniadakis, G. E. (2013). Fractional spectral methods for fractional differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(1). (Superdiffuziya masalalarida spektral usullarni qo'llash).
9. Salaxitdinov, M. S., & Islomov, B. I. (2000). *Uzluksiz va uzlukli sohalarda aralash tipdagi tenglamalar*. Fan. (O'zbekistonlik olimlarning differensial tenglamalar sohasidagi fundamental ishlari).
10. Mamchuev, M. O. (2017). Boundary value problems for the subdiffusion equation with a fractional derivative in a moving domain. *Differential Equations*, 53(10). (Aynan harakatlanuvchi sohadagi diffuziya masalalariga bag'ishlangan zamonaviy maqola).