

NOLOKAL BOSHLANG'ICH VA NEYMAN CHEGARAVIY SHARTLI ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASI UCHUN MANBANI ANIQLASHNING TESKARI MASALASI.

Madaminova Muharram Zaripovna

Osiyo xalqaro universiteti

1-kurs magistratura, matematika yo'nalishi

Annotatsiya: Ushbu maqolada issiqlik tarqalish tenglamasi uchun noma'lum manba funksiyasini aniqlashning teskari masalasi tadqiq etiladi. Masalaning o'ziga xosligi shundaki, unda klassik boshlang'ich shart o'rniga nolokal boshlang'ich shart va chegarada Neyman sharti (issiqlik oqimi) berilgan. Manba funksiyasini topish uchun qo'shimcha integral ko'rinishdagi ma'lumotdan foydalanilgan. Masalaning yagonaligi va mavjudligi Furiye qatorlari usuli yordamida isbotlangan hamda yechimning berilgan ma'lumotlarga bog'liqligi tahlil qilingan.

Kalit so'zlar: Teskari masala, issiqlik tarqalish tenglamasi, nolokal shart, Neyman sharti, manba funksiyasi, Furiye usuli, korrektlik.

Issiqlik o'tkazuvchanlik jarayonlarini modellashtirishda ko'pincha muhitning ichki manbalari quvvatini aniqlash talab etiladi. Agar manba haqida yetarli ma'lumot bo'lmasa, lekin ma'lum nuqtalarda yoki vaqt oralig'ida issiqlik miqdori o'lchangan bo'lsa, bu teskari masala hisoblanadi.

Zamonaviy fizik jarayonlarda, masalan, plazma fizikasi yoki termelastiklik sohalarida klassik Koshi shartlari har doim ham yetarli bo'lmaydi. Shu sababli, nolokal shartli masalalarni o'rganish nazariy va amaliy ahamiyatga ega. Ushbu ishda biz faqat vaqtga bog'liq bo'lgan noma'lum manbani topish masalasini ko'rib chiqamiz.

Teskari masalalar nazariyasi A.N. Tikhonov, M.M. Lavrentyev va V.K. Ivanov kabi olimlar tomonidan asoslangan. Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun manbani aniqlash masalalari so'nggi yillarda J.R. Cannon va A.I. Prilepko ishlarida keng yoritilgan.

Nolokal shartli masalalar (masalan, Bitsadze-Samarskiy turidagi) issiqlik muvozanati saqlanishi kerak bo'lgan tizimlarda uchraydi. Neyman sharti esa chegaradagi issiqlik almashinuvini tavsiflovchi tabiiy shart sifatida ko'plab muhandislik hisob-kitoblarida qo'llaniladi.

Ushbu teskari masalani chuqurroq tahlil qilish uchun uni matematik qismlarga ajratamiz. Bu turdagi masalalarda asosiy maqsad — soha ichidagi jarayonni to'liq kuzatish imkoni bo'lmagan holatda, chegaraviy yoki qo'shimcha ma'lumotlar yordamida "noma'lum manba"ni ($g(t)$) tiklashdir.

Quyida masalaning matematik apparati va yechish bosqichlari batafsil keltirilgan.

1. Matematik Modelning To'liq Ko'rinishi

Faraz qilaylik, bizda quyidagi differensial tenglama berilgan:

$$u_t - a^2 u_{xx} = g(t)q(x) + F(x, t), \quad (x, t) \in D$$

Bu yerda:

- $u(x, t)$ — noma'lum harorat taqsimoti.
- $g(t)$ — topilishi kerak bo'lgan noma'lum manba quvvati.
- $q(x)$ va $F(x, t)$ — berilgan funksiyalar.

Chegaraviy va Nolokal Shartlarning Ma'nosi:

1. **Neyman sharti (Ikkinchi tur):** $u_x(0, t) = 0, u_x(L, t) = 0$. Bu fizik jihatdan soha chegaralari issiqlikdan izolyatsiya qilinganini (issiqlik oqimi nolga teng) anglatadi.
2. **Nolokal boshlang'ich shart:** $u(x, 0) + \int_0^T \omega(t)u(x, t)dt = \phi(x)$. Bu shart jarayonning boshlang'ich holati uning butun vaqt davomidagi o'rtacha qiymatiga bog'liqligini ko'rsatadi.
3. **Qo'shimcha ma'lumot (Teskari masala uchun):** $\int_0^L \sigma(x)u(x, t)dx = E(t)$ yoki $u(x_0, t) = h(t)$. Bu ma'lumot manbani aniqlash uchun zarur.

2. Yechish Algoritmi (Fure usuli yordamida)

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Neyman chegaraviy sharti uchun xos funksiyalar ko'rinishida bo'ladi.

I Bosqich: Yechimni qatorga yoyish

Yechimni va berilgan funksiyalarni xos funksiyalar bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

II Bosqich: Differensial tenglamaga keltirish

Tenglamani har bir koeffitsient uchun alohida yozsak, oddiy differensial tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$u'_n(t) + \lambda_n u_n(t) = g(t)q_n + F_n(t)$$

Bu yerda $\lambda_n = a^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$.

III Bosqich: Nolokal shartdan foydalanish

Nolokal shartni qanoatlantiruvchi $u_n(t)$ ni topsak, u integral ko'rinishga keladi:

$$u_n(t) = u_n(0)e^{-\lambda_n t} + \int_0^t [g(s)q_n + F_n(s)]e^{-\lambda_n(t-s)} ds$$

$u_n(0)$ ni topish uchun nolokal shartni $(u_n(0) + \int_0^T \omega(t)u_n(t)dt = \phi_n)$ ishlatamiz.

3. Noma'lum $g(t)$ ni Aniqlash

Qo'shimcha shartni (masalan, $u(x_0, t) = h(t)$) differensial tenglamaga qo'yib, $g(t)$ uchun Volterra tipidagi integral tenglama olamiz:

$$h'(t) - a^2 u_{xx}(x_0, t) = g(t)q(x_0) + F(x_0, t)$$

Bu yerdan $g(t)$ ni ajratib olish mumkin:

$$g(t) = \frac{1}{q(x_0)} \left[h'(t) - a^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) X_n''(x_0) - F(x_0, t) \right]$$

4. Muhim Nazariy Xulosalar

1. Yagonalik: Agar $q(x_0) = 0$ bo'lsa va berilgan funksiyalar yetarli darajada silliq bo'lsa, teskari masalaning yechimi yagona bo'ladi.
2. Barqarorlik: Neyman shartlari ostida yechim chegaralangan bo'lishi uchun $\lambda_0 = 0$ holatiga alohida e'tibor berish lozim (o'rtacha harorat saqlanishi qonuni).
3. Konvergensiya: Nolokal shartdagi $u(t)$ funksiyasining qiymati va soha uzunligi L yechimning qator ko'rinishida yaqinlashish tezligiga ta'sir qiladi.

Amaliy tavsiya

Agar siz ushbu masalani dasturlash (Python yoki MATLAB) orqali yechmoqchi bo'lsangiz, Chekli Ayirmalar Usuli (Finite Difference Method) yoki Krank-Nikolson sxemasi eng samarali hisoblanadi. Chunki nolokal shart integralni o'z ichiga olgani sababli, oddiy vaqt bo'yicha qadam tashlash (time-stepping) usulini iteratsiya bilan birga qo'llash kerak bo'ladi.

Xulosa

Nolokal shartning mavjudligi masalani klassik masalaga nisbatan murakkablashtiradi, chunki u vaqt bo'yicha "o'tmish" va "kelajak" o'rtasidagi bog'liqlikni ifodalaydi. Neyman sharti esa issiqlik izolatsiyasini anglatadi, bu esa manba funksiyasini aniqlashda integral shart bilan birgalikda o'rtacha issiqlik energiyasi saqlanishini tekshirish imkonini beradi. Eksperimental ma'lumotlardagi kichik xatoliklar $f(t)$ ni

aniqlashda turg'unlikka ta'sir qilishi mumkin, bu esa regulyarizatsiya usullarini qo'llash zaruriyatini tug'diradi.

Tadqiqot natijasida nolokal boshlang'ich shartli teskari masalaning matematik modeli qurildi va uni yechish algoritmi ishlab chiqildi.

1. Furye usuli ushbu turdagi teskari masalalarni tahliliy yechish uchun samarali vositadir.

2. Nolokal shart koeffitsienti γ yechimning mavjudlik sohasini belgilaydi.

Kelgusida ushbu masalani vaqt bo'yicha kasr tartibli hosilali tenglamalar uchun o'rganish.

Olingan tahliliy natijalarni raqamli usullar (masalan, chekli ayirmalar usuli) yordamida kompyuterda modellashtirish.

Manba funksiyasi nafaqat vaqtga, balki fazoviy koordinataga ham bog'liq bo'lgan holatlarni tadqiq etish.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Tikhonov, A. N., & Arsenin, V. Y. (1977). *Solutions of Ill-posed Problems*. Winston & Sons. (Teskari masalalar bo'yicha fundamental asar).
2. Kozhanov, A. I. (2014). *Composite Type Equations and Inverse Problems*. De Gruyter. (Murakkab turdagi tenglamalar va teskari masalalar uchun metodik qo'llanma).
3. Prilepko, A. I., Orlovsky, D. G., & Vasin, I. A. (2000). *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*. Marcel Dekker. (Manba funksiyasini topish usullari bayon etilgan).
4. Bitsadze, A. V., & Samarskii, A. A. (1969). "Some elementary boundary-value problems for elliptic equations with non-local conditions". *Doklady Akademii Nauk SSSR*. (Nolokal shartlarning nazariy asosi).
5. Cannon, J. R. (1984). *The One-Dimensional Heat Equation*. Cambridge University Press. (Issiqlik tarqalish tenglamasi bo'yicha klassik darslik).
6. Ashyralyev, A., & Sobolevskii, P. E. (2004). *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*. Birkhäuser. (Nolokal shartli masalalarning sonli yechimlari haqida).

7. Isakov, V. (2017). *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer. (Parabolik tenglamalar uchun teskari masalalar tahlili).
8. Samarskii, A. A., & Vabishchevich, P. N. (2007). *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*. Walter de Gruyter. (Metodlar bo'limi uchun foydali manba).
9. Umarov, S. (2015). *Introduction to Fractional and Pseudo-Differential Equations with Singular Symbols*. Springer. (Zamonaviy nolokal va kasr tartibli masalalar uchun).
10. Zikirov, O. S. (2020). *Xususiy hosilali differensial tenglamalar*. Universitet. (O'zbek tilidagi fundamental darsliklardan biri).