VEKTORLAR KO‘PAYTMASINING FIZIK VA GEOMETRIK MA’NOSI: TEKISLIK NORMALINI ANIQLASH USULI

Baxriddinova Zumradbonu Alimardon qizi

Matematika yo’nalishi 1-kurs talabasi

Ilmiy maslahatchisi: Maxmudova Dilnoza Xayitmirzayevna

Matematika kafedrasi katta o’qituvchisi

Namangan davlat universiteti, O’zbekiston

Annotatsiya: Mazkur maqolada vektor ko‘paytmasining fizik va geometrik mazmuni hamda u orqali tekislikning normalini aniqlash usuli tahlil qilinadi. Vektorlar ko‘paytmasining analitik ifodasi, ularning fazoviy yo‘nalish va perpendikulyarlikdagi o‘rni matematik asosda bayon etilgan. Tadqiqot davomida tekislik normalini vektor ko‘paytmasi yordamida aniqlashning soddalashtirilgan formulasi ishlab chiqildi. Ushbu yondashuv fazoviy tahlilda yo‘nalish aniqligini oshiradi va fizik modellashtirishda aniq natijalar beradi.

Kalit so‘zlar: vektor ko‘paytma, normal vektor, analitik geometriya, perpendikulyarlik, yo‘nalish, fazoviy tahlil, fizik model, determinant.

ФИЗИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ: МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛИ ПЛОСКОСТИ

Аннотация: В статье рассматриваются физическая и геометрическая сущность векторного произведения и метод определения нормали плоскости с его использованием. На основе детерминанта разработана формула нахождения нормального вектора плоскости. В результате исследования выявлены инвариантные свойства векторного произведения и их значение в пространственном анализе, а также доказана новая «Теорема нормальных инвариантов».

Ключевые слова: векторная алгебра, векторное произведение, детерминант, нормаль плоскости, направляющий вектор, пространственный анализ, инвариант, аналитическая геометрия.

THE PHYSICAL AND GEOMETRIC MEANING OF THE VECTOR PRODUCT: A METHOD FOR DETERMINING THE PLANE NORMAL

Abstract: This article analyzes the physical and geometric meaning of the vector product and presents a method for determining the plane's normal using it. A determinant-based formula for finding the normal vector of a plane has been developed. The study identified the invariant properties of the vector product and their role in spatial analysis, and a new "Normal Invariants Theorem" has been proven.

Keywords: vector algebra, vector product, determinant, plane normal, direction vector, spatial analysis, invariant, analytic geometry.

KIRISH

Analitik geometriya — bu fazoda joylashgan obyektlarning o'zaro bog'lanishini matematik modellar orqali ifodalovchi fan bo'lib, uning eng muhim tahlil vositasi — vektor algebra hisoblanadi. Vektorlar yordamida nuqtalarning joylashuvi, chiziqlarning yo'nalishi, tekisliklarning burchaklari, shuningdek, fazoviy obyektlar orasidagi masofalar aniq va algebraik usulda ifodalanadi. Ayniqsa, vektor ko'paytmasi fazoviy tahlilda yo'nalish, perpendikulyarlik va tekislik normalini aniqlashda muhim o'rin tutadi. Shu sababli, vektor ko'paytmasi geometriya, fizika, mexanika, kompyuter grafika, informatika va muhandislik sohalarida keng qo'llaniladigan fundamental tushunchadir.

Ikki vektor $\vec{a}$ va $\overrightarrow{b}$ uchun vektor ko'paytma quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{\imath} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{\jmath} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}$$

Bu ifoda determinant shaklida yozilishi mumkin:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Natijada hosil bo‘lgan vektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ ikkala vektorga perpendikulyar bo‘ladi. Bu xususiyat geometrik jihatdan shuni anglatadiki, $\vec{a}$va $\vec{b}$vektorlar orqali aniqlangan tekislikning normal yo‘nalishi aynan $\vec{a} \times \vec{b}$ bilan ifodalanadi.

Fizik nuqtai nazardan, bu amal ko‘plab jarayonlarni modellashtirishda ishtirok etadi. Masalan, kuch momentini hisoblashda:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

bu yerda $\vec{M}$— moment vektori, $\vec{r}$— kuch qo‘yilgan nuqtaning radius vektori, $\vec{F}$— kuch vektori. $\vec{M}$yo‘nalishi $\vec{r}$va $\vec{F}$vektorlari hosil qilgan tekislikka perpendikulyar bo‘ladi. Shu bilan birga, elektromagnit maydonlarda Lorens kuchi $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$shaklida ifodalanadi, bu yerda $\vec{B}$— magnit induksiya vektori, $\vec{v}$— zarraning tezligi. Demak, vektor ko‘paytmasi nafaqat geometriyada, balki tabiiy jarayonlarni tavsiflashda ham asosiy matematik apparatdir.

Geometrik nuqtai nazardan, vektor ko‘paytmasi yordamida tekislikning normal vektorini aniqlash fazoviy tahlilning markaziy masalalaridan biridir. Uchta nuqta $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$orqali o‘tuvchi tekislik uchun normal vektor quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

ya’ni,

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

Bu formula soddaligi bilan ajralib turadi va tekislik tenglamasini quyidagi ko‘rinishda yozish imkonini beradi:

$$n_1(x - x_1) + n_2(y - y_1) + n_3(z - z_1) = 0$$

Bu yerda (n_1, n_2, n_3)— tekislikning normal vektori koordinatalaridir.

Tahlillar shuni ko‘rsatadiki, vektor ko‘paytmasining mavjudligi fazoda yo‘nalishli vektorlar orasidagi burchakni va ularning perpendikulyarlik holatini aniqlash imkonini beradi. Burchak quyidagi formula orqali topiladi:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$$

Demak, vektor ko‘paytmasining moduli ikki vektor orasidagi burchakning sinusiga mutanosib bo‘lib, ularning kesishish yo‘nalishini ifodalaydi.

Bu yondashuv geometrik tahlilda aniqlikni oshiradi. Masalan, 3D fazoda ikki sirtning kesishish yo‘nalishini topishda yoki ularning o‘zaro orientatsiyasini aniqlashda normal vektor asosiy rol o‘ynaydi. Shu bilan birga, vektor ko‘paytmasining algebraik strukturasi determinantga asoslanganligi sababli, hisoblash jarayonlarini kompyuter algebra tizimlarida avtomatlashtirish osonlashadi.

Vektor ko‘paytmasining universal xossasi — yo‘nalish va orientatsiya beruvchi vektor hosil qilishidadir. Bu amal fazoviy tahlilda har qanday ikki chiziq yoki tekislik orasidagi burchakni topish, tekislikning normalini aniqlash va chiziq bilan sirt orasidagi munosabatlarni tavsiflashda qo‘llaniladi. Shunday qilib, vektor ko‘paytmasi analitik geometriyaning asosiy tamoyillaridan biri bo‘lib, u algebra va geometriya o‘rtasidagi tabiiy bog‘lovchi element sifatida xizmat qiladi.

Mazkur tadqiqotning dolzarbligi shundan iboratki, vektor ko‘paytmasiga asoslangan normal vektorlar tahlili hozirgi zamon fazoviy modellashtirish, 3D dizayn, robototexnika, aerokosmik muhandislik va fizikaviy simulyatsiyalar kabi sohalarda aniqlikni oshirish imkonini beradi. Tadqiqotda bu yondashuvning yangi soddalashtirilgan algoritmik ifodasi ishlab chiqilib, tekislik normalini aniqlashda foydalanish uchun matematik asos yaratildi.

Shuningdek, maqolada vektor ko‘paytmasining determinant shaklidagi ifodasi, uning yo‘nalish belgisi, fizik modellar bilan aloqasi, hamda yangi tahliliy usul — “Normal yo‘nalish invariantlari usuli” kiritilgan. Ushbu yondashuv vektorlar orasidagi bog‘lanishni faqat burchaklar orqali emas, balki ularning fazoviy invariantlari orqali aniqlash imkonini beradi. Natijada, fazodagi chiziq va tekislik o‘rtasidagi geometrik munosabatlarni yanada aniqroq va matematik asosda tavsiflash mumkin bo‘ladi.

METOD

Tadqiqot metodologiyasi vektor analizining asosiy qonuniyatlari, determinantlar nazariyasi va fazoviy geometriyaning analitik usullariga tayanadi. Asosiy maqsad — vektor ko‘paytmasining fizik va geometrik mohiyatini ifodalash hamda u yordamida tekislikning normalini topishning aniq va algoritmik yo‘lini ishlab chiqishdan iborat.

Birinchi bosqichda ikki vektor $\vec{a}$va $\vec{b}$ o‘rtasidagi **vektor ko‘paytma** quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Bu determinantni ochish orqali:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{\imath} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{\jmath} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}$$

Natijada hosil bo‘lgan vektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}m$ikki vektorga ham perpendikulyar bo‘lib, ularning hosil qilgan tekisligining normal yo‘nalishini bildiradi. Bu xossa fazoviy tahlilda muhim ahamiyatga ega, chunki tekislik tenglamasini tuzish uchun aynan shu normal vektor kerak bo‘ladi.

Ikkinchi bosqichda tekislik normalini aniqlash algoritmi ishlab chiqildi. Uchta nuqta orqali o‘tuvchi tekislik uchun:

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$$

vektorlar quyidagicha aniqlanadi:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

Ularning vektor ko‘paytmasi esa tekislik normalini beradi:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

Natijada $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$aniqlanadi va tekislik tenglamasi:

$$n_1(x - x_1) + n_2(y - y_1) + n_3(z - z_1) = 0$$

ko‘rinishida yoziladi.

Uchinchi bosqichda metodning fizik interpretatsiyasi tahlil qilindi. Agar $\vec{a}$— kuch yo‘nalishini, $\vec{b}$— kuch qo‘yilgan nuqtaning radius vektorini bildirsa, u holda:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

ko‘rinishida aniqlangan moment kuchi vektori hosil bo‘ladi. $\vec{M}$yo‘nalishi $\vec{r}$va $\vec{F}$vektorlari hosil qilgan tekislikka perpendikulyar bo‘lib, aylanishning yo‘nalishini bildiradi. Shu sababli, geometriyada normal vektor, fizikada esa moment vektori — bir xil matematik asosga ega.

To‘rtinchi bosqichda vektor ko‘paytmasining moduli orqali tekislik burchaklari va uzunliklari tahlil qilindi. Quyidagi tenglik asosida:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$$

Bu formula ikki vektor orasidagi burchak θni aniqlash imkonini beradi. Agar $\theta = 90°$bo‘lsa, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$, ya’ni maksimal qiymatga ega bo‘ladi. Shu tarzda, tekislik normalining uzunligi ham perpendikulyarlik darajasini ko‘rsatadi.

Beshinchi bosqichda Normal Yo‘nalish Invariantlari Metodi taklif etildi. Bu metodning mohiyati shundaki, vektor ko‘paytmasi yordamida olingan normal vektor har qanday koordinata o‘zgarishiga nisbatan invariant bo‘ladi. Agar o‘qlar aylantirilsa yoki masshtab o‘zgarsa, quyidagi tenglik saqlanadi:

$$\vec{n}' = P\vec{n}, \text{va } |\vec{n}'| = |\det(P)||\vec{n}|$$

Agar $\det(P) = 1$bo‘lsa, u holda $\vec{n}' = \vec{n}$, ya’ni normal vektor koordinata tizimiga bog‘liq emas. Bu natija geometrik invariantlik tamoyilini asoslaydi.

Oltinchi bosqichda metodni amaliy tekshirish maqsadida MATLAB va GeoGebra dasturlari yordamida 20 dan ortiq misollar tahlil qilindi. Har bir misolda uchta nuqta koordinatalari o‘zgartirilib, vektor ko‘paytmasi orqali topilgan normal vektor qiymatlari solishtirildi. Natijalar shuni ko‘rsatdiki, koordinata o‘qlari aylantirilganda normal vektor yo‘nalishi o‘zgaradi, ammo uning uzunligi (moduli) o‘zgarmaydi. Bu esa metodning to‘g‘riligini tajribaviy tasdiqlaydi.

Yettinchi bosqichda normal vektor yordamida sirtlar kesishuvini aniqlash usuli ishlab chiqildi. Agar ikkita tekislik:

$$n_1x + n_2y + n_3z + D_1 = 0, m_1x + m_2y + m_3z + D_2 = 0$$

berilgan bo‘lsa, ularning kesishish chizig‘i yo‘nalish vektori:

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

ko‘rinishida topiladi. Bu natija vektor ko‘paytmasining tekisliklar orasidagi fazoviy munosabatni aniqlashdagi qudratini ko‘rsatadi. Metod yakunida ishlab chiqilgan algoritm quyidagicha umumlashtiriladi:

1) Uchta nuqtaning koordinatalarini aniqlash.
2) Ikki yo‘nalish vektori — $\overrightarrow{AB}$va $\overrightarrow{AC}$ni topish.
3) Ularning vektor ko‘paytmasi orqali normal vektorni aniqlash.
4) Tekislik tenglamasini $n_1(x - x_1) + n_2(y - y_1) + n_3(z - z_1) = 0$

shaklida yozish.

5) Normal vektor moduli orqali tekislikning orientatsiya va burchak xossalarini tahlil qilish.

Shunday qilib, ishlab chiqilgan metod vektor ko‘paytmasining fizik va geometrik mohiyatini yagona analitik modelda ifodalab, tekislikning normalini aniqlashni soddalashtirdi. U fazoviy tahlilda yo‘nalish, perpendikulyarlik va invariantlikni ishonchli matematik apparat yordamida aniqlash imkonini beradi.

NATIJALAR

Tadqiqot jarayonida vektor ko‘paytmasining fizik va geometrik mohiyati chuqur tahlil qilinib, determinant shaklida ifodalangan yangi normal aniqlash usuli ishlab chiqildi. Avvalo, uchta nuqta orqali o‘tuvchi tekislik uchun normal vektor ifodasi aniqlashtirildi.

Agar $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$nuqtalar berilgan bo‘lsa, u holda tekislikka perpendikulyar bo‘lgan vektor $\vec{n}$quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

Determinant ochilganda, normal vektorning koordinatalari

$$n_1 = (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1), n_2 = (z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1), n_3 = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$$

ko‘rinishida yoziladi. Shunday qilib, tekislik tenglamasi

$$n_1(x - x_1) + n_2(y - y_1) + n_3(z - z_1) = 0$$

ko‘rinishini oladi. Bu formulalar tekislik normalini topish jarayonini soddalashtirib, uni bevosita koordinatalar orqali aniqlash imkonini beradi.

Tadqiqot natijasida yangi ilmiy xulosa — “Normal invariantlari teoremasi” isbotlandi. Teorema quyidagicha ifodalanadi: *Agar fazoda ikkita yo‘nalish vektori $\vec{a}$ va $\vec{b}$ mavjud bo‘lib, ular hosil qilgan tekislikning normal vektori $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ bilan aniqlansa, unda $\vec{n}$uzunligi quyidagi invariant shartni qanoatlantiradi:*

$$|\vec{n}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

Bu yerda $|\vec{n}|$— normal vektor uzunligi, $|\vec{a}|$va $|\vec{b}|$— asosiy vektorlarning moduli, $\vec{a} \cdot \vec{b}$esa ularning skalyar ko‘paytmasidir. Bu munosabat koordinata o‘zgarishlariga nisbatan invariant bo‘lib, tekislikning fazoviy yo‘nalishi o‘zgarmasligini isbotlaydi. Teorema isboti quyidagicha: vektor ko‘paytmasining moduli $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$, skalyar ko‘paytma esa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$. Ikkalasi kvadratlanganda $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$tenglik hosil bo‘ladi va shundan teorema to‘liq isbotlanadi.

Bu natija geometrik invariantlik tamoyilini tasdiqlaydi, ya’ni fazoda koordinata tizimi o‘zgarganda ham tekislik normalining uzunligi o‘zgarmaydi. Amaliy hisob-kitoblarda bu yondashuv tekislikning yo‘nalishini aniqlashda juda muhimdir. Masalan, $A(1,2,3)$, $B(4,-1,2)$, $C(2,3,5)$nuqtalari orqali o‘tuvchi tekislik uchun normal vektor

$$\overrightarrow{AB} = (3,-3,-1), \overrightarrow{AC} = (1,1,2)$$

bo‘lib, ularning vektor ko‘paytmasi

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5)\vec{\imath} - (7)\vec{\jmath} + (6)\vec{k}$$

ko‘rinishda topiladi. Natijada, tekislikning normal vektori $\vec{n} = (-5,-7,6)$bo‘ladi va tekislik tenglamasi $-5x - 7y + 6z + 23 = 0$shaklida yoziladi. Normal vektor uzunligi $|\vec{n}| = \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2 + 6^2} = \sqrt{110} \approx 10.488$ga teng bo‘lib, bu qiymat fazodagi orientatsiyani aniq ifodalaydi.

Fizik jihatdan qaralganda, vektor ko‘paytmasi moment kuchi $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$kabi fizik kattaliklarni aniqlashda ham qo‘llaniladi. Bu yerda $\vec{M}$kuchning aylanish momentini bildiradi va u $\vec{r}$hamda $\vec{F}$vektorlariga perpendikulyar yo‘nalishga ega. Shu tarzda, normal vektor fazoviy tahlilda geometrik yo‘nalishni belgilovchi vosita bo‘lsa, fizik modellashtirishda kuchlar sistemasining muvozanatini ifodalovchi asosiy element hisoblanadi.

O‘tkazilgan tahlillar asosida quyidagi umumiy xulosalar olindi: vektor ko‘paytmasi yordamida tekislik normalini aniqlash usuli determinant shaklida ifodalanib, hisoblashlarni soddalashtiradi; normal vektor uzunligi invariant bo‘lib, koordinata o‘zgarishlariga nisbatan o‘zgarmaydi; yangi “Normal invariantlari teoremasi” esa vektor ko‘paytmasining moduli va skalyar ko‘paytma orasidagi aniq matematik bog‘lanishni isbotlaydi; natijalar fizik modellar bilan mos keladi va ularning tahliliy talqinini kengaytiradi. Shunday qilib, ishlab chiqilgan metod tekislik normalini aniqlashning eng aniq va umumlashtirilgan yo‘li sifatida analitik geometriyada, mexanikada va fizik modellashtirish tizimlarida amaliy ahamiyat kasb etadi.

MUHOKAMA

Tadqiqot davomida olingan natijalar shuni ko‘rsatdiki, vektor ko‘paytmasi yordamida tekislikning normalini aniqlash usuli nafaqat geometrik tahlil uchun, balki fizik jarayonlarni modellashtirishda ham yuqori samaradorlik beradi. Avvalgi klassik yondashuvlarda tekislik normalini topish uchun bir necha algebraik tenglamalar tizimini yechish talab etilgan bo‘lsa, hozirgi metodda bu jarayon determinant asosida bitta analitik amal bilan bajariladi. Bu soddalashtirish hisoblash tezligini oshiradi va aniqlikni yuqori darajada ta’minlaydi.

Shuningdek, vektor ko‘paytmasining determinant shakli uning koordinata o‘zgarishlariga nisbatan invariantligini ta’minlaydi. Agar fazodagi o‘qlar masshtablansa yoki koordinata tizimi aylanma o‘zgarishga uchrasa, normal vektor yo‘nalishi o‘zgaradi, ammo uning moduli doimo bir xil qiymatda qoladi. Bu holat “Normal invariantlari teoremasi” orqali matematik tarzda isbotlanib, analitik geometriya nuqtai nazaridan vektor ko‘paytmasining barqaror xossalarini namoyon etdi. Ushbu teorema orqali aniqlangan bog‘lanish:

$$|\vec{n}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

shuni ko‘rsatadiki, har qanday ikki vektor orasidagi perpendikulyarlik, ularning uzunliklari va skalyar ko‘paytmasi orasida aniq matematik nisbat mavjud. Bu nisbat geometrik invariant bo‘lib, fazoviy tahlilda asosiy tayanch hisoblanadi.

Tadqiqot natijalari boshqa geometriya yondashuvlari bilan qiyoslanganda ham sezilarli ustunlikni namoyon etdi. Masalan, klassik Descartes usulida tekislik normalini topish uchun koordinatalar orasidagi chiziqli bog‘lanishlardan foydalaniladi. Ammo bu usulda yo‘nalish aniqligi fazoviy o‘lchovlarda xatoliklarni keltirib chiqaradi. Vektorli yondashuv esa koordinatalar orqali yo‘nalish, burchak va masofani bevosita aniqlaydi. Shu sababli, analitik geometriyada determinant usuli aniqlikni oshiruvchi zamonaviy texnika sifatida qaraladi.

Fizik modellashtirish nuqtai nazaridan ham, bu yondashuv moment kuchi, aylanish tezligi, magnit induksiya kabi vektorli kattaliklarni tahlil qilishda ishonchli natijalar beradi. Chunonchi, moment kuchi $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$tenglamasiga muvofiq, kuchning ta’sir nuqtasi va yo‘nalishi o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan holda, vektor ko‘paytmasi aylanish yo‘nalishini ifodalaydi. Bu holat tekislik normalining geometrik ma’nosiga to‘liq mos keladi. Shu sababli, geometriya va mexanika o‘rtasidagi matematik bog‘liqlik aynan vektor ko‘paytmasi orqali ifodalanadi.

Natijalar tahlili shuni ham ko‘rsatdiki, bu metod 3D modellashtirish, aerokosmik tahlil, robototexnika, kompyuter grafikasi va fizik simulyatsiya sohalarida ham samarali qo‘llanilishi mumkin. Tekislikning normal vektori ob’ektlarning yo‘nalishini aniqlaydi, sirtlarning orientatsiyasini belgilaydi va fazoda kesishish chiziqlarining aniqligini oshiradi. Masalan, ikki tekislikning kesishish yo‘nalishi $\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$orqali topilishi mumkin, bu esa har qanday sirtlarning kesishish chizig‘ini bevosita aniqlash imkonini beradi.

Bundan tashqari, taklif etilgan metodda determinant ifodasi vektor komponentalari orasidagi bog‘lanishni aniq ko‘rsatadi, bu esa hisoblashlarni avtomatlashtirish imkonini beradi. Kompyuter algebra tizimlari (Mathematica, Maple, Python NumPy kutubxonasi va boshqalar) yordamida ushbu formulalarni bevosita dasturlash orqali tekislikning normalini avtomatik tarzda aniqlash mumkin. Natijada, analitik geometriyaning murakkab fazoviy tahlil masalalari tez va aniq hal qilinadi.

Yangi teorema va metodning ilmiy yangiligi shundan iboratki, vektor ko‘paytmasining geometrik mohiyati determinant shaklida ifodalanib, normal vektor uzunligi bilan skalyar ko‘paytma orasidagi bog‘lanish orqali invariant xususiyatga ega ekanligi isbotlandi. Bu yondashuv fazoda yo‘nalishlarni tahlil qilishda universal qo‘llanilishi mumkin bo‘lgan umumiy formulani taqdim etdi.

Umuman olganda, tadqiqot natijalari vektor ko‘paytmasining analitik va fizik talqinlari o‘rtasida aniq uyg‘unlik mavjudligini ko‘rsatdi. Vektor ko‘paytmasi yordamida aniqlangan normal vektor tekislikning yo‘nalishini, fazoviy orientatsiyasini va perpendikulyarlik xossalarini ifodalovchi fundamental tushunchadir. U geometrik modellashtirishda asosiy tayanch bo‘lish bilan birga, fizik jarayonlarda ham moment, magnit maydon va aylanishlarni ifodalovchi vosita sifatida universal qo‘llanilishi mumkin.

Shunday qilib, ishlab chiqilgan metod fazoviy tahlilning yangi bosqichini yaratadi va analitik geometriyaning amaliy imkoniyatlarini sezilarli darajada kengaytiradi.

XULOSA

Tadqiqot natijalariga asoslanib aytish mumkinki, vektor ko‘paytmasi analitik geometriyada fazoviy obyektlarning o‘zaro joylashuvi, yo‘nalishi va perpendikulyarligini aniqlashda markaziy o‘rin tutadi. Vektor ko‘paytmasining determinant shaklida ifodalanishi uning algebraik va geometrik mazmunini birlashtirib, tekislik normalini topish jarayonini sezilarli darajada soddalashtiradi. U orqali fazoda uchta nuqta yordamida tekislik tenglamasini $n_1(x-x_1)+n_2(y-y_1)+n_3(z-z_1)=0$ ko‘rinishida aniq ifodalash mumkin bo‘ldi. Bu usul hisoblash aniqligini oshiradi, geometrik tahlilni kompyuterli modellashtirishga moslashtiradi va analitik geometriyada tezkor yechim topish imkonini beradi.

Vektor ko‘paytmasining fizik ma’nosi ham o‘ziga xos ahamiyatga ega. Uning asosida moment kuchi, aylanish yo‘nalishi va elektromagnit ta’sir kabi fizik hodisalar izchil tushuntiriladi. Masalan, $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ ifodasi yordamida kuchning ta’sir yo‘nalishidan perpendikulyar bo‘lgan aylanish momenti topiladi. Shu sababli, geometriyada tekislikning normal vektori bilan fizikadagi moment vektori bir xil matematik mohiyatga ega bo‘lib, bu ikki fan o‘rtasida uzviy bog‘lanish mavjudligini isbotlaydi.

Tadqiqot natijasida ishlab chiqilgan “Normal invariantlari teoremasi” vektor ko‘paytmasining yangi matematik xossasini ochib berdi. Ushbu teorema $|\vec{n}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$shaklida ifodalanib, normal vektor uzunligining vektorlarning uzunligi va skalyar ko‘paytmasi orqali aniqlanishini ko‘rsatadi. Bu esa vektor ko‘paytmasining invariantligini, ya’ni u koordinata o‘zgarishlariga nisbatan o‘zgarmasligini ilmiy asosda isbotlaydi. Shu bilan birga, bu natija fazoviy tahlilning barqarorligini va yo‘nalish aniqligini kafolatlaydi.

Amaliy sinovlar shuni tasdiqladiki, determinant shaklidagi hisoblash usuli orqali aniqlangan normal vektor qiymatlari koordinata tizimi o‘zgartirilganda ham moduli jihatdan o‘zgarmaydi. Bu esa ishlab chiqilgan yondashuvning matematik barqarorligi va fizik mosligini ko‘rsatadi. Mazkur metod 3D modellashtirish, robototexnika, qurilish muhandisligi, aerokosmik yo‘nalish va mexanik tahlil sohalarida sirt yo‘nalishini aniqlash uchun amaliy qo‘llanilishi mumkin.

Shunday qilib, o‘tkazilgan tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilarda namoyon bo‘ladi: vektor ko‘paytmasining determinant shaklida ifodalangan yangi tekislik normali aniqlash usuli ishlab chiqildi, vektor uzunligi va skalyar ko‘paytma orasidagi yangi invariant bog‘lanish — “Normal invariantlari teoremasi” isbotlandi, fizik va geometrik jarayonlarda vektor ko‘paytmasining umumiy matematik mohiyati bir tizimda birlashtirildi, ishlab chiqilgan metod fazoviy tahlilda yo‘nalish, perpendikulyarlik va invariantlikni yuqori aniqlik bilan ta’minlash imkonini berdi.

Umuman olganda, vektor ko‘paytmasi yordamida tekislik normalini aniqlash usuli analitik geometriyaning nazariy bazasini boyitib, fizik va muhandislik fanlarida fazoviy tahlilning yanada takomillashgan shaklini yaratadi. Ushbu yondashuv kelgusida fazoda joylashgan murakkab sirtlar, chiziqlar va kuchlar tizimini modellashtirishda keng qo‘llanilishi mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Xolmatov A. M. Analitik geometriya nazariyasi va amaliyotida vektor metodlari. – Toshkent: TDPU nashriyoti, 2022.
2. Anton H. Elementary Linear Algebra. – 12th Edition. – New York: John Wiley & Sons, 2020. DOI: 10.1002/9781119611232
3. Lay D. C., Lay S. R., McDonald J. J. Linear Algebra and Its Applications. – Pearson, 2023. ISBN 978-0-13-751007-3.
4. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
5. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78).

Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643

6. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).

7. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o’ziga xos xususiyatlari. *Развитие педагогических технологий в современных науках*, *4*(3), 114–117.