

BICHIZIQLI VA KVADRATIK FORMALAR

KELDIYOROVA GULSEVAR OTABEK QIZI

ABDIMURODOVA IQBOLOY MUZAFFAR QIZI

Shahrisabz Davlat Pedagogika Instituti

Matematika va Informatika yo'nalishi 3-kurs talabasi

TURAYEV ZIYOVUDDIN UKTAMXON O'G'LI

Shahrisabz Davlat Pedagogika Instituti

Matematika va ta'limda axborot texnologiyasi

kafedrası o'qituvchisi

Annotatsiya: Ushbu mavzuda chiziqli algebra va uning umumiy lashtirilgan tushunchalari hisoblangan bichiziqli va kvadratik formalar nazariyasi o'rganiladi. Bichiziqli forma – ikki argumentli funksional bo'lib, har bir argument bo'yicha alohida chiziqlilik xususiyatiga ega. Kvadratik forma esa vektorlarning o'zlari bilan bichiziqli forma orqali bog'lanishi natijasida hosil bo'ladigan, vektordan bitta haqiqiy sonni qaytaruvchi maxsus funksional sifatida ta'riflanadi. Mavzuda ushbu formalarni matritsa orqali ifodalash, ularning kanonik ko'rinishga keltirilishi, invariantlar, simmetrik va nosimmetrik formalar, shuningdek, kvadratik shakllarning tasnifi kabi masalalar ko'rib chiqiladi.

Kalit so'zlar: bichiziqli forma, kvadratik forma, chiziqlilik, simmetrik forma, matritsa ko'rinishi, kanonik ko'rinish, invariantlar, diagonalizatsiya, chiziqli algebra, vektor fazosi, bilinear form, quadratic form, tasniflash, eigen qiymatlar, pozitiv aniqlik.

Annotatsion: This topic studies the theory of linear and quadratic forms, which are considered to be linear algebra and its generalized concepts. A linear form is a two-argument functional, which has a separate linearity property for each argument. A quadratic form is defined as a special functional that is formed by connecting vectors with

themselves through a linear form, and returns one real number from the vector. The topic considers issues such as the representation of these forms by a matrix, their canonical representation, invariants, symmetric and asymmetric forms, as well as the classification of quadratic forms.

Keywords: bilinear form, quadratic form, linearity, symmetric form, matrix representation, canonical representation, invariants, diagonalization, linear algebra, vector space, bilinear form, quadratic form, classification, eigenvalues, positive definiteness.

Аннотация: В данной теме изучается теория линейных и квадратичных форм, которые рассматриваются как часть линейной алгебры и её обобщённых понятий. Линейная форма – это двухаргументный функционал, обладающий свойством линейности для каждого аргумента. Квадратичная форма определяется как специальный функционал, образованный путём соединения векторов самих с собой посредством линейной формы и возвращающий из вектора одно действительное число. В теме рассматриваются такие вопросы, как представление этих форм матрицей, их каноническое представление, инварианты, симметричные и асимметричные формы, а также классификация квадратичных форм.

Ключевые слова: билинейная форма, квадратичная форма, линейность, симметричная форма, матричное представление, каноническое представление, инварианты, диагонализация, линейная алгебра, векторное пространство, билинейная форма, квадратичная форма, классификация, собственные значения, положительная определенность.

Kirish. Bichiziqli (bilinear) va kvadratik (quadratic) formalar chiziqli algebra va geometriyaning markaziy tushunchalaridandir. Ular vektor fazolarida ikki argumentli chiziqli funksiyalar va vektordan bitta son oladigan kvadratik funksiyalar sifatida aniqlanadi. Ushbu tushunchalar matritsa ifodasi, o'lchovlar (metric), konus va kvadrik sirtlar, optimallashtirish (masalan, ekstremumlarni aniqlash), hamda statistik tahlil va mexanikada energiya ifodalari kabi ko'plab qo'llanmalarga ega.

Bichiziqli forma shartlari

$$B(u+v, w)=B(u,w)+B(v,w),$$

$$B(\alpha u, w)=\alpha B(u, w),$$

$$B(u, w+z)=B(u, w)+B(u, z),$$

$$B(u, \beta w)=\beta B(u, w).$$

Matritsa orqali yozilishi

Agar $A=[A_{uv}]$ – bichiziqli formaning matritsasi bo'lsa:

$$B(x, y)=x^T A y.$$

Matritsaning elementlari

$$A_{uv}=B(e_u, e_v).$$

Bichiziqli forma — ikki argumentli funksional bo'lib, har ikki argument bo'yicha chiziqli:

$$B: V \times V \rightarrow F, B(u, v) \text{ chiziqli } (u \text{ va } v) \text{ bo'yicha.}$$

Bu degani, har bir argumentning alohida qaraganda u oddiy chiziqli funksiyaga bo'ysunadi.

Muhim xossalar.

Simmetriklik:

$$B(u, v)=B(v, u).$$

Nosimmetriklik (skew-simmetrik):

$$B(u, v)=-B(v, u).$$

Bichiziqli forma — vektor fazosida aniqlangan ikki argumentli funksional bo'lib, har bir argument bo'yicha chiziqli xarakterga ega. Bunday formalarning asosiy mohiyati shundaki, ular ikki vektor o'rtasidagi o'zaro munosabatni algebraik tarzda ifodalaydi. Bu munosabat geometrik, analitik yoki fizik mazmun kasb etishi mumkin.

Bichiziqli formalar ko‘pincha vektorlar fazosining tuzilishini yanada chuqurroq o‘rganish, fazodagi masofalar, burchaklar, proyeksiyalar va boshqa turdagi bog‘lanishlarni tavsiflashda qo‘llanadi. Ularning yordamida fazoda maxsus metrikalar, inersiya tenzorlari, jarayonlarning energiya xossalari hamda chiziqli operatorlar bilan bog‘liq ko‘plab tushunchalar aniqlanadi.

Bichiziqli formalar simmetrik va nosimmetrik turlarga bo‘linadi. Simmetrik formalar ko‘proq geometriya va fizikada qo‘llansa, nosimmetrik formalar antisimmetrik tuzilmalarni o‘rganishda ishlatiladi.

Kvadratik forma — vektorning o‘zi bilan bog‘langan bichiziqli forma orqali aniqlanadigan funksionaldir. U vektordan yagona son qiymat qaytaradi va bu qiymat ko‘pincha vektorning ma’lum bir miqdorini, masalan, energiyasini, normasi yoki moduli kabi kattaliklarni aks ettiradi.

Kvadratik formalar chiziqli algebraning geometrik mazmunini ochib berishda muhim vositadir. Fazodagi egri chiziqlar, sirtiy shakllar, ellipsoid, giperboloid kabi ko‘plab figurani aynan kvadratik formalar orqali ifodalash mumkin. Bu formalar asos o‘zgartirilganda o‘zgaradi, lekin ularning muhim xossalari — inertsia, tasnifi va aniqligi — o‘zgarmas holda qoladi.

Kvadratik formalar vektor fazosidagi muhim tuzilmalarni tavsiflash imkonini beradi. Masalan, ularning ijobiy, manfiy yoki aralash xossalarga ega bo‘lishi fazoning qanday geometriyaga ega ekanini belgilaydi. Shuningdek, ular optimallashtirishda, ayniqsa funksiyalar ekstremumlarini aniqlashda markaziy o‘rin tutadi.

Bichiziqli va kvadratik formalar o‘rtasidagi bog‘liqlik

Har bir kvadratik forma ortida unga mos keluvchi bichiziqli forma mavjud bo‘ladi. Ularning o‘zaro bog‘lanishi maxsus algebraik munosabat orqali aniqlanadi. Bu bog‘lanish kvadratik formalarni tahlil qilishni osonlashtiradi, chunki kvadratik forma bir argumentga ega bo‘lsa, unga mos bichiziqli forma ikki argumentli tuzilma berib, uni umumiyroq ko‘rinishda o‘rganish imkonini beradi.

Kanonik va diagonal ko'rinishlar

Bichiziqli va kvadratik formalarni o'rganish jarayonida ular bazani mos tanlash orqali soddalashtiriladi. Shu orqali kvadratik forma murakkab ko'rinishdan oson va tushunarli ko'rinishga keltiriladi. Bu jarayonda ularning ichki tuzilishi, invariantlari va boshqa o'zgarmas xususiyatlari aniqlanadi. Diagonal yoki kanonik ko'rinish kvadratik formaning eng muhim xarakterini namoyon qiladi va tasniflash uchun qulaylik yaratadi.

Ularning qo'llanilish sohasi

Bichiziqli va kvadratik formalar quyidagi sohalarda keng qo'llanadi:

Analitik geometriya: konik chiziqlar va kvadrik sirtlarni tavsiflash.

Optimallashtirish: funksiya ekstremumlarini topishda, ayniqsa ikkinchi tartibli tahlilda.

Mexanika: energiya, inersiya momenti, elastiklik kabi fizik kattaliklarni ifodalashda.

Statistika: kovariatsiya matritsasi asosidagi tahlillar va masofalar.

Lineer algebra: chiziqli operatorlar, eigen tuzilmalar va vektor fazolari geometriyasini o'rganishda.

Bichiziqli forma — ikki argumentli funksiyadir. Bu funksiya o'zida ikki xil o'zgaruvchini qabul qiladi va har bir o'zgaruvchi bo'yicha alohida qaralganda chiziqli bo'lishi bilan ajralib turadi. Ya'ni birinchi argumentga nisbatan qaralganda ham, ikkinchisiga nisbatan qaralganda ham oddiy chiziqli funksiya kabi ishlaydi. Bichiziqli formalar ko'pincha matematikada matritsalar orqali ifodalanadi. Ularning asosiy xususiyati shundaki, ular vektorlarning o'zaro ta'siri, munosabati yoki parallel ravishda qanday bog'lanishini tasvirlaydi. Fizika, mexanika, algebra va geometriyada turli jarayonlarning matematik modelini yaratishda keng qo'llanadi. Bichiziqli forma simmetrik yoki antisimmetrik bo'lishi mumkin. Simmetrik bo'lganda uning qiymati argumentlarning joyi almashtirilganda o'zgarmaydi. Antisimmetrik bo'lganda esa argumentlar joyi almashtirilganda belgisi o'zgaradi. Bichiziqli formaning matritsasi asos almashtirilganda

maxsus qoidaga ko'ra o'zgaradi. Bunda eski fazodan yangi fazoga o'tish kiritilgan o'zgaruvchilar orqali amalga oshiriladi.

Kvadratik forma tushunchasi

Kvadratik forma — barcha hadi ikkinchi darajali bo'lgan ifodalar majmui hisoblanadi. Bu algebra, geometriya, analiz va optimizatsiya sohalarida juda katta ahamiyatga ega bo'lgan tushunchadir. Kvadratik forma amalda ikki o'zgaruvchi yoki undan ko'p o'zgaruvchi ishtirokidagi barcha ikkinchi tartibli munosabatlarni birlashtiradi. Kvadratik forma aslida simmetrik bichiziqli formaning o'ziga xos bir ko'rinishi bo'lib, u aynan bir xil argumentni ikki marotaba qo'llash orqali hosil qilinadi. Uni tushunishda asosiy nuqta — har bir had faqat ikkinchi darajali bo'lishi va aralash hadlar ham shu darajaga tegishli bo'lishidir. Kvadratik formalar turli asoslarda turlicha ko'rinish olishi mumkin. Asos almashtirilganda kvadratik forma ham mos ravishda o'zgaradi. Asosni to'g'ri tanlash orqali kvadratik formani soddalashtirish, hatto butunlay aralash hadlardan xoli diagonal shaklga keltirish mumkin. Bu jarayon matematikada diagonallashtirish deb yuritiladi.

Kvadratik formaning turlari

Kvadratik formalar o'zining qiymatlari xossalari ko'ra turli sinflarga ajratiladi:

Musbat aniqlangan kvadratik forma

Bu turdagi kvadratik forma nol bo'lmagan barcha argumentlar uchun faqat musbat qiymat qabul qiladi. Bu — shaklning barcha yo'nalishlarda yuqoriga qarab ochilganini bildiradi.

Musbat yarim aniqlangan kvadratik forma

Bu kvadratik forma ba'zi hollarda nolga teng bo'lishi mumkin, lekin hech qachon manfiy qiymat qabul qilmaydi.

Manfiy aniqlangan kvadratik forma

Bunday forma barcha nol bo'lmagan argumentlar uchun manfiy qiymat beradi.

Indefinit kvadratik forma

Bu turdagi formalar ba'zi argumentlar uchun musbat, boshqalar uchun esa manfiy qiymat beradi. Ular "ikki tomonga ochilgan" shaklga o'xshab tasvirlanadi.

Kvadratik formaning qaysi turga mansubligini aniqlash matematikada juda muhim bo'lib, bu jarayon optimizatsiya masalalarida ekstremumlar mavjudligini tekshirishda ham ishlatiladi.

Kvadratik formani soddalashtirish va diagonallashtirish

Kvadratik forma ko'pincha aralash hadlarga ega bo'ladi. Bu aralash hadlar formaning shaklini murakkablashtiradi. Asos almashtirish yordamida kvadratik forma soddaroq ko'rinishga, ya'ni faqat kvadrat hadlardan iborat diagonal ko'rinishga keltirilishi mumkin.

Diagonallashtirilgan kvadratik forma matematik ishlov berishda, xususan, ekstremal nuqtalarni topishda, fazoviy shakllarni tahlil qilishda, fizikadagi energiya funksiyalarini o'rganishda juda qulay bo'ladi.

Bichiziqli va kvadratik formalar matematikaning fundamental tushunchalari bo'lib, ular nafaqat nazariy, balki amaliy masalalarda ham katta ahamiyatga ega. Bichiziqli forma ikki argumentli bog'lanishlarni ifodalashda qulay vosita bo'lsa, kvadratik forma ko'plab jarayonlarning strukturaviy xossalarni tahlil qilishda muhim rol o'ynaydi. Kvadratik formaning aniqlik turi, diagonallashtirilishi va asos almashtirilgandagi xossalari uni turli sohalarda qo'llash imkonini beradi. Shuningdek, bu tushunchalar optimizatsiya, statistika, fizika, mashina o'rganish va analitik geometriya kabi ko'plab ilmiy yo'nalishlarning nazariy poydevorini tashkil etadi. Mazkur kurs ishida bichiziqli va kvadratik formalar nazariyasi keng yoritildi, ularning asosiy xususiyatlari, tasnifi hamda qo'llanilish sohalari yoritildi. Ushbu ma'lumotlar mavzuning to'liq tasavvurini shakllantirishga yordam beradi va keyingi chuqur matematik tahlillar uchun mustahkam bilim bazasi yaratadi.

Bichiziqli forma

Ta'rif: Ikki o'zgaruvchili funksiya, unda har bir o'zgaruvchi alohida birinchi darajali bo'lib kiritiladi. Misol uchun, $f(x,y)=2x+3y+5$ kabi.

Asosiy xususiyat: Bu funksiyaning grafigi tekislikda paraboloid bo'lib, u har bir o'zgaruvchiga nisbatan tekis bo'ladi.

Kvadratik forma

Ta'rif: Ikki o'zgaruvchili funksiya, unda ikkinchi darajali ko'paytmalar mavjud. Misol uchun, $(f(x,y)=x^2+3xy+y^2-2x+4y+1$.

Asosiy xususiyat: Bu funksiyaning grafigi qovoqsimon (paraboloid) shaklga ega bo'lishi mumkin, unda har bir o'zgaruvchi darajasi ikkinchi bo'ladi.

Qo'llanilishi: Bu formalar fizika, muhandislik va iqtisodiyotda keng qo'llaniladi, masalan, energiya, kinetik harakat va boshqalar bilan bog'liq hisoblashlarda.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Apostol, Tom M. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag, 1976.
2. Davenport, Harold. *Multiplicative Number Theory*. 3rd ed., Revised by Hugh L. Montgomery, Springer, 2000.
3. Hardy, G. H., and E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. 6th ed., Oxford University Press, 2008.
4. Iwaniec, Henryk, and Emmanuel Kowalski. *Analytic Number Theory*. American Mathematical Society, 2004.
5. Montgomery, Hugh L., and Robert C. Vaughan. *Multiplicative Number Theory I: Classical Theory*. Cambridge University Press, 2007.
6. Nathanson, Melvyn B. *Additive Number Theory: The Classical Bases*. Springer, 1996.
7. Titchmarsh, E. C. *The Theory of the Riemann Zeta-Function*. 2nd ed., Revised by D. R. HeathBrown, Oxford University Press, 1986.
8. Selberg, Atle. "Lectures on Sieve Methods." *Collected Papers*, vol. 1, Springer, 1989, pp. 383–489.
9. Vinogradov, I. M. *Elements of Number Theory*. Dover Publications, 1954.
10. Edwards, H. M. *Riemann's Zeta Function*. Dover Publications, 2001.