

KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING EKSTREMUMLARI

KELDIYOROVA GULSEVAR OTABEK QIZI

Shahrisabz Davlat Pedagogika Instituti

Matematika va Informatika yo'nalishi 3-kurs talabasi

ZAHRIDDINOVA SHAHLO ZAHRIDDIN QIZI

Shahrisabz Davlat Pedagogika Instituti

Matematika va ta'limda axborot texnologiyasi

kafedra o'qituvchisi

Annotatsiya: Ushbu mavzuda ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning lokal va global ekstremumlarini aniqlashga oid nazariy va amaliy masalalar yoritiladi. Avvalo, ikki va undan ortiq o'zgaruvchili funksiyalarning differentsiallanish shartlari, gradient, gessian (Hesse matritsasi) tushunchalari keltiriladi. Keyinchalik ekstremum mavjudligi uchun zarur va yetarli shartlar, xususan, stasionar nuqtalarni topish, ikkinchi tartibli hosilalar yordamida nuqtaning turi (minimum, maksimum yoki egilish nuqtasi)ni aniqlash usullari izohlanadi.

Kalit so'zlar: ko'p o'zgaruvchili funksiya, ekstremum, lokal maksimum, lokal minimum, global ekstremum, stasionar nuqta, kritik nuqta, gradient, gessian, Hesse matritsasi, ikkinchi tartibli hosila, cheklovli ekstremum, Lagrange usuli, optimallashtirish, funksiyaning differentsiallanuvchanligi, egilish nuqtasi, chegaraviy ekstremum.

Annotatsion: This topic covers theoretical and practical issues related to determining local and global extrema of multivariable functions. First, the concepts of differentiation conditions, gradient, and Hessian (Hesse matrix) of functions of two or more variables are introduced. Then, necessary and sufficient conditions for the existence of an extremum are explained, in particular, methods for finding stationary points and determining the type of point (minimum, maximum, or inflection point) using second-order derivatives.

Keywords: multivariable function, extremum, local maximum, local minimum, global extremum, stationary point, critical point, gradient, Hessian, Hesse matrix, second derivative, limited extremum, Lagrange method, optimization, differentiability of a function, inflection point, limiting extremum.

Аннотация: В данной теме рассматриваются теоретические и практические вопросы, связанные с определением локальных и глобальных экстремумов функций многих переменных. Вводятся понятия условий дифференцирования, градиента и гессиана (матрицы Гессе) функций двух и более переменных. Затем излагаются необходимые и достаточные условия существования экстремума, в частности, методы нахождения стационарных точек и определения типа точки (минимум, максимум или точка перегиба) с помощью производных второго порядка.

Ключевые слова: функция многих переменных, экстремум, локальный максимум, локальный минимум, глобальный экстремум, стационарная точка, критическая точка, градиент, гессиан, матрица Гессе, вторая производная, ограниченный экстремум, метод Лагранжа, оптимизация, дифференцируемость функции, точка перегиба, предельный экстремум.

Kirish. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar matematik analizning eng muhim bo'limlaridan biri bo'lib, ularning ekstremumlarini topish ko'plab ilmiy va amaliy sohalarda muhim ahamiyat kasb etadi. Fizik jarayonlarni modellashtirish, iqtisodiy samaradorlikni oshirish, texnik tizimlarni optimallashtirish, sun'iy intellekt va mashinaviy o'qitish algoritmlarida eng qulay yechimni topish aynan ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar ekstremumlarini tahlil qilishga borib taqaladi. Bunday funktsiyalarning xulq-atvorini o'rganish bir o'zgaruvchili funktsiyalar bilan solishtirganda ancha murakkab bo'lib, ularning differentsiallanuvchanlik shartlari, gradient va gessian kabi ko'p o'lchovli tushunchalarni qo'llashni talab qiladi. Ekstremumni topish jarayonida stasionar nuqtalarni aniqlash, bu nuqtalarning tabiatini ikkinchi tartibli hosilalar orqali baholash hamda cheklovlar mavjud bo'lgan holatlarda Lagrange koeffitsiyentlari usulidan foydalanish zarur bo'ladi. Ushbu mavzu ko'p o'zgaruvchili tizimlarda optimal yechimlarni izlashning

nazariy asoslarini o'rgatib, talabalarga ilmiy-tadqiqot va amaliy jarayonlarda muhim bo'lgan matematik tahlil ko'nikmalarini shakllantirishga xizmat qiladi.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ekstremumlar (maksimum va minimum) bu funksiyaning eng katta yoki eng kichik qiymat beruvchi nuqtalari bo'lib, ular funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilalarining nolga teng bo'lishi orqali aniqlanadi. Bunday nuqtalar statsionar nuqtalar deb ataladi va ulardan keyin, ikkinchi tartibli xususiy hosilalar yordamida turini aniqlash uchun ikkinchi hosilalar testi (yoki Hesse matritsasi) qo'llaniladi.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning ekstremumlari

Ko'p o'zgaruvchili funksiya tushunchasi

Agar funksiyaning qiymati ikki yoki undan ortiq o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, u holda u ko'p o'zgaruvchili funksiya deyiladi. Masalan:

$$z = f(x, y), \quad z = f(x, y, t), \quad u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Ekstremum nima? Ko'p o'zgaruvchili funksiya da ekstremum – bu funksiya qiymati ma'lum bir nuqtada o'z atrofiga nisbatan eng katta yoki eng kichik qiymatga ega bo'lgan holatdir.

Ekstremumning ikki turi mavjud:

Maksimum – nuqtaning atrofida funksiyaning eng yuqori qiymati.

Minimum – nuqtaning atrofida funksiyaning eng past qiymati.

Bundan tashqari:

Lokal ekstremum – faqat o'ziga yaqin nuqtalarda yuqori/kichik bo'lgan qiymat.

Global ekstremum – butun sohada eng katta yoki eng kichik qiymat.

Ekstremumlarni topish uchun qanday nuqtalar tekshiriladi? Ko'p o'zgaruvchili funksiya da ekstremumlar faqat stasionar (kritik) nuqtalarda paydo bo'ladi. Bu nuqtalarda funksiyaning o'zgarishi vaqtincha "to'xtaydi", ya'ni funksiyaning o'sishi yoki pasayishiga sabab bo'ladigan miqdorlar nolga yaqinlashadi.

Oddiy qilib aytganda:

Kritik nuqta — funksiyaning "oʻzgarish

Kritik nuqtaning turi qanday aniqlanadi? yoʻnalishi aniqlanmay qolgan" joyi.

Kritik nuqta topilgandan soʻng, u quyidagi toifalardan biriga mansub boʻlishi mumkin:

Lokal minimum

Funksiya shu nuqtaga yaqin barcha joylarda undan katta boʻladi. Bu togʻ orasidagi chuqur joyga oʻxshaydi.

Lokal maksimum

Funksiyaning shu nuqtada qiymati atrofidagi barcha nuqtalarga nisbatan katta boʻladi. Bu togʻ choʻqqisiga oʻxshash holat.

Saddle (egilish) nuqtasi

Funksiya bir yoʻnalishda oshadi, boshqa yoʻnalishda kamayadi. Bu otda uchraydigan "egarlangan" sirt shakliga oʻxshaydi. Bunda ekstremum boʻlmaydi.

Minimum – chuqur, pastga botiq joy.

Maksimum – baland, tepaga chiqadigan joy.

Saddle – bir tomoni tepaga, bir tomoni pastga qaragan sirt.

Bunday tasavvur funksiyaning ekstremum xatti-harakatini anglashda juda qulay.

Cheklovli ekstremumlar. Baʼzida funksiya hamma nuqtalarda emas, balki faqat maʼlum sohada oʻrganiladi. Masalan: resurs chegaralari mavjud boʻlsa, ikkita oʻzgaruvchi orasida bogʻliqlik boʻlsa, faqat muayyan soha ichida optimal qiymat izlanadigan boʻlsa.

Bunday holatlarda ekstremumlarni topish usuli boshqacharoq boʻladi. Eng mashhur usul – Lagrange usuli boʻlib, u cheklovlar ostida maksimal yoki minimal qiymatni topishga yordam beradi.

Ekstremum tushunchasi

Faraz qilaylik, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqta atrofida aniqlangan bo'lsin.

Agar ushbu nuqta uchun quyidagi tengsizliklardan biri bajarilsa:

$f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ yoki $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ bo'lsa, u holda $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada

lokal ekstremumga ega deyiladi. Birinchi holatda $f(x,y)$ **lokal minimum**, ikkinchisida esa **lokal maksimum** deyiladi. Agar tengsizlik har qanday (x,y) uchun bajarilsa, ekstremum **global** deb ataladi.

Ekstremumning zaruriy sharti

Faraz qilaylik $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsin va bu nuqtada ekstremum mavjud bo'lsin.

Bu holda ekstremumning **zaruriy sharti** quyidagicha ifodalanadi:

$$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$$

ya'ni, birinchi tartibli xususiy hosilalar nolga teng bo'lishi kerak. Bunday nuqta **stasionar nuqta** deb ataladi.

Bu shart ekstremumning **mavjudligi uchun zarur**, ammo **yetarli** emas. Sababi, ba'zi hollarda $f_x=f_y=0$ bo'lgan nuqtalar ekstremum emas, balki **egri tekislikdagi burilish nuqtalari** bo'lishi mumkin.

Ekstremumning yetarli sharti

Ikki o'zgaruvchili differentsiallanuvchi funksiyaning stasionar nuqtasida ekstremum bor yo'qligini aniqlash uchun **ikkinchi tartibli hosilalar** tekshiriladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Nefedov, V. N. "Necessary and Sufficient Conditions of Extremum for Polynomials and Power Series in the Case of Two Variables." *arXiv preprint*, 2024. arxiv.org/abs/2402.10564.
2. Herrero Debón, Alicia. "Free Extrema of Two Variables Functions." *Universitat Politècnica de València*, 2019. Available at: riunet.upv.es/handle/10251/122886.
3. Bozarov, Dilmurod Uralovich. "Ikki o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumidan foydalanib, tekislikdagi ikkita figura orasidagi masofani topish." *Oriental Renaissance*:

Innovative, Educational, Natural and Social Sciences, vol. 2, no. 9, 2022, pp. 154–160.

<https://doi.org/10.24412/2181-1784-2022-9-154-160>.

4. Maxmasaidova, Sayyodxon Ubaydulla qizi. “The Extrema of Functions of Multivariable and Solution of Economic Problems.” *Scientific Journal of Research in Multidisciplinary Studies*, vol. 3, no. 2, 2023, pp. 45–52.