

IKKI O'LCHOVLI INTEGRALLAR, HISOBLASH O'ZGARUVCHILARNI ALMASHTIRISH, QUTB KOORDINATALAR SISTEMASIDA HISOBLASH, TADBIQLARI.

Sh.Z.Zaxiriddinova

Matematika va ta'limda axborot texnologiyasi

kafedra o'qituvchisi

Mamadaliyeva Mashxura Salim qizi

Shahrisabz Davlat Pedagogika instituti

Pedagogika fakulteti

Matematika va informatika yo'nalishi

3-bosqich talabasi.

Annotatsiya: Maqolada ikki o'lchovli integrallarning nazariy asoslari, hisoblashda o'zgaruvchilarni almashtirish usuli va qutb koordinatalarida integral hisoblashning afzalliklari yoritiladi. Shuningdek, metodlarning amaliy masalalarni yechishda qo'llanilishi tahlil qilinadi.

Kalit so'zlar: Ikki o'lchovli integral; o'zgaruvchilarni almashtirish; qutb koordinatalari; amaliy tadbiqlar.

Аннотация: В статье рассматриваются теоретические основы двойных интегралов, методы замены переменных при вычислениях и применение полярной системы координат. Проанализировано использование данных методов в решении прикладных задач.

Ключевые слова: Двойной интеграл; замена переменных; полярные координаты; прикладные применения.

Annotation: This article examines the theoretical foundations of double integrals, the method of variable substitution in computations, and the use of polar coordinates for evaluating integrals. Practical applications of these techniques in solving real-world problems are also discussed.

Keywords: Double integral; change of variables; polar coordinates; applications.

KIRISH: Hozirgi zamon matematika fanining asosiy yo‘nalishlaridan biri bo‘lgan ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar analizida ikki o‘lchovli integrallar muhim o‘rin tutadi. Ikki o‘lchovli integrallar yordamida fazoviy jarayonlar, maydonlar, massa taqsimotlari, fizik kattaliklarning o‘zgarishi, turli shakldagi sohalarning yuzalari va modellarini aniqlash mumkin. Shuning uchun ham ushbu tushuncha nafaqat sof matematikada, balki fizika, mexanika, iqtisodiyot, muhandislik, kompyuter grafika va texnologiyalarning ko‘plab tarmoqlarida keng qo‘llaniladi.

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarni integrallash jarayoni bir qator nazariy va amaliy masalalarni hal etishni talab qiladi: integral osti funksiyaning xususiyati, integrallash sohasi shaklining murakkabligi, chegaralarni aniqlash, integrallash tartibini to‘g‘ri tanlash va hisoblash jarayonini samarali bajarish shular jumlasidandir. Ayniqsa, integrallash sohasining murakkab chegaralarga ega bo‘lishi yoki qiyin tasvirlanishi odatiy koordinatalarda integrallashni murakkablashtiradi. Bunday vaziyatda o‘zgaruvchilarni almashtirish usuli, xususan qutb koordinatalari sistemasi katta imkoniyat yaratadi.

Qutb koordinatalari ko‘plab amaliy masalalarda ayniqsa qulay bo‘lib, aylana, halqa, sektor kabi geometrik sohalarni yuzasini yoki ularga bog‘liq fizik kattaliklarni hisoblashni ancha soddalashtiradi. Ushbu tizim integralning chegaralarini tabiiy ko‘rinishda ifodalashga, vaqtni tejashga va hisoblashni aniq bajarishga yordam beradi. Bundan tashqari, o‘zgaruvchilarni almashtirish orqali murakkab shaklli sohalarni soddaroq geometrik ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘ladi, bu esa integralni hisoblash jarayonini sezilarli darajada yengillashtiradi.

Ikki o‘lchovli integral tushunchasiga olib keluvchi hajm haqidagi masala

Oxy tekislikda yopiq chiziqli bilan chegaralangan D sohani hamda pastdan shu soha bilan, yon yoqdan yo‘naltiruvchisi D sohaning chegarasi - egri chiziqdan iborat yasovchisi Oz o‘qqa parallel silindrik C sirt bilan, yuqoridan tenglamasi

$z = f(x, y)$ bo'lgan σ sirtning qismi (bo'lagi) bilan chegaralangan silindrik jismni qaraymiz (1-chizma). Bunda $f(x, y)$ funksiya D sohada aniqlangan, uzluksiz va musbat deb faraz qilamiz. Shu silindrik jismning hajmini topish talab etilsin.

D sohani istalgan chiziqlar yordamida n ta ixtiyoriy kichik $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ yuzchalarga ajratamiz, bunda $\sum_{k=1}^n \Delta S_k = S - D$ sohaning yuzi.

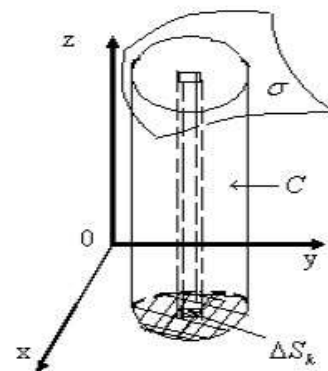
Har bir ΔS_k yuzchani ustida yuqoridan σ sirtning bo'lakchasi bilan chegaralangan va Oxy tekislikdagi proyeksiyasi ΔS_k dan iborat silindr yasaymiz. Bu bilan qaralayotgan asosiy silindrik jism

n ta asosiy ΔS_k bo'lgan ustunchalarga ajratiladi. Asosi ΔS_k bo'lgan ustunchaning hajmini ΔV_k orqali belgilaymiz.

U holda silindrik jismning hajmi V shu ustunchalarning hajmlarini yig'indisiga teng:

$$V = \sum_{k=1}^n \Delta V_k.$$

1-chizma.



Asosi ΔS_k bo'lgan silindrni qaraymiz. ΔS_k da ixtiyoriy $P(x_k, y_k)$ nuqtani olib bu silindrning balandligi sifatida σ sirdagi P nuqtaga mos nuqtaning applikatasi $z_k = f(x_k, y_k)$ ni olamiz.

Bu silindrning hajmi asosining yuzi ΔS_k bilan balandligi $f(x_k, y_k)$ (ni) ko'paytmasini asosi ΔS olamiz: $\Delta V_k \approx f(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k$. bo'lgan ustunning hajmi ΔV_k ning taqribiy qiymati deb

Barcha shunaqa hajmlarning yig'indisini olsak silindrik jismning hajmi V ni taqribiy qiymati kelib chiqadi:

$$V = \sum_{k=1}^n \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k.$$

ning aniq qiymati sifatida

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

yig'indining ΔS_k yuzchalarning soni cheksiz ortgandagi va har bir yuzchalar nuqtaga tortilgandagi (yig'ilgandagi) limitini qabul qilamiz:

$$V = \lim_{\max \text{diam} \Delta S_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k \quad (1.1)$$

Shunday qilib, silindrik jismning hajmi V ni topish masalasi qandaydir limitni hisoblashga keltirildi.

Ikki o'lchovli integralning ta'rifi va mavjudligi

Yuqoridagi $y = f(x) \geq 0$ uzluksiz egri chiziq, chapdan $x = a$, o'ngdan $x = b$ vertikal to'g'ri chiziqlar, quyidan Ox o'qning $[a, b]$ kesmasi bilan chegaralangan

egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish masalasi $\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$ ko'rinishdagi yig'indining $\max \Delta x_k \rightarrow 0$ dagi limitini topishga, ya'ni **aniq integral** tushunchasiga olib kelgan edi.

Shuningdek yuqoridan $z = f(x, y)$ sirt, quyidan Oxy tekislik va yasovchisi Oz o'qqa parallel, yo'naltiruvchisi D sohaning chegarasi yopiq - egri chiziqdan iborat bo'lgan silindrik sirt bilan chegaralangan jismning hajmini topish masalasi

$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$ (1.1) ko'rinishdagi yig'indining ΔS_k sohalarning diametrlarini eng kattasi 0 ga intilgandagi limitini topishga, ya'ni **ikki o'lchovli integral** tushunchasiga olib keldi.

Oxy tekislikda yopiq - chiziq bilan chegaralangan D sohani hamda bu sohada aniqlangan va chegaralangan $z = f(x, y)$ funksiyani qaraymiz.

D sohani ixtiyoriy bo'lmagan $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$

chiziqlar bilan n ta umumiy ichki nuqtalarga ega bo'laklarga bo'lib ularni elementar yuzchalar deb

ataymiz va ularning yuzlarini ham $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ orqali belgilaymiz. ΔS_k ($k=1, n$) yuzlarning har birida bittadan nuqta olib ularni $P_1, P_2, \dots, P_n$ lar orqali belgilaymiz. Funksiyaning tanlangan nuqtalardagi qiymatlari $f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n)$ lar_ni hisoblab ularni mos ravishda $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ yuzchalarga ko'paytirib

$$V_n = f(P_1) \Delta S_1 + f(P_2) \Delta S_2 + \dots + f(P_n) \Delta S_n = \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta S_k \quad (1.2)$$

yig'indini tuzamiz. Bu yig'indi D sohada $f(x, y)$ funksiya uchun **integral yig'indi** deb ataladi.

D sohada $f(x, y) \geq 0$ bo'lganda har bir $f(P_k) \Delta S_k$ ko'paytma geometrik jihatdan asosi ΔS_k , balandligi $f(P_k)$ bo'lgan **silindrcha (ustuncha) ning hajmini** ifodalaydi.

1-ta'rif. (1.2) integral yig'indi $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ yuzchalarning diametrlarining eng kattasi 0 ga intilganda D sohani $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ yuzchalarga bo'linish usulidamda bu yuzchalarda $P, P, \dots, P$ nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan aniq limitga ega bo'lsa, bu limit $f(x, y)$ funksiyadan D soha bo'yicha olingan **ikki o'lchovli integral** deyiladi va

$$\iint f(P) dS \text{ yoki } \iint f(x, y) dx dy_D$$

ko'rinishda belgilanadi. Demak,
ta'rifga binoan

$$\lim_{\max \text{diam} \Delta S_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta S_k = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Bu yerda D soha **integrallash sohasi** deyiladi.

2-ta'rif. Chekli limit $\lim_{\max \text{diam} \Delta S_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta S_k$ mavjud bo'lsa $f(x, y)$ funksiya D sohada **integrallanuvchi** deb ataladi.

Xuddi bir o'zgaruvchili funksiya dagidek $f(x, y)$ funksiyaning integrallanuvchi bo'lishi uchun uning chegaralangan bo'lishi zarur. Ammo bu shart yetarli emas. Masalan, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ kvadratda aniqlangan

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x, y \text{ ratsional sonlar bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x, y \text{ lardan kamidabiri irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya integrallanuvchi emas. Da'voning to'g'riligi bevosita ikki o'lchovli integralning ta'rifidan kelib chiqadi.

1.1-teorema. Chegaralangan yopiq D sohada uzluksiz $z = f(x, y)$ funksiya shu sohada integrallanuvchidir.

Faqatgina uzluksiz funksiyalar integrallanuvchi bo'lar ekan deb o'ylash noto'g'ri. Chegaralangan yopiq D sohada uzlukli funksiyalar orasida integrallanuvchi bo'lganlari ham, integrallanuvchi bo'lmaganlari ham mavjud.

Ikki o'lchovli integralning geometrik ma'nosi

Ikki o'lchovli integral tushunchasidan foydalanib (1.1) yig'indining limitini

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Shunday qilib ikki o'lchovli integral geometrik jihatdan jismning **hajmini**

ifodalar ekan. Bu ikki o'lchovli integralning **geometrik ma'nosi**.

Agar D da $f(x, y) \equiv 1$ bo'lsa, u holda ikki o'lchovli integralning qiymati son jihatdan integrallash sohasining yuzi S ga teng bo'ladi:

$$S = \iint_D 1 \cdot dx dy = \lim_{\max \text{diam} \Delta S_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta S_k = \lim_{\max \text{diam} \Delta S_k \rightarrow 0} S.$$

Ikki o'lchovli integralning mexanik ma'nosi

Oxy tekislikda joylashgan yupqa tekis moddiy D plastinka berilgan bo'lsin. Shu plastinkaning ΔS yuzchasini hamda undagi $P(x, y)$ nuqtani qaraymiz. Yuzchaning Δm massasini uning yuzi ΔS ga nisbati, ya'ni $\frac{\Delta m}{\Delta S}$ nisbat, ΔS

yuzchaning o'rtacha **sirt zichligi** deb ataladi. Agar $\frac{\Delta m}{\Delta S}$ nisbat ΔS yuzcha $P(x, y)$ nuqtaga tortilganda γ limitga ega bo'lsa, bu limit D plastinkaning P nuqtadagi **sirt zichligi** deyiladi. Bu limit nuqtaning vaziyatiga bog'liq bo'ladi. Shuning uchun u P nuqtaning koordinatalarini qandaydir funksiyasi bo'ladi: $\gamma = \gamma(x, y)$.

Sirt zichligi $\gamma = \gamma(x, y)$ $P(x, y)$ nuqtani koordinatalarining uzluksiz funksiyasi sifatida berilganda D plastinkaning massasi m ni aniqlaymiz. Agar D plastinka bir jinsli, ya'ni γ zichlik uning barcha nuqtalarida o'zgarmas $\gamma = \gamma_0$ bo'lsa, u holda plastinkaning massasi

$$m = \gamma_0 S \quad (1.3)$$

bo'ladi, bunda S plastinkaning yuzi.

Sirt zichligi γ nuqtanining vaziyatiga bog'liq ravishda o'zgarganda (1.3) formula D plastinkani massasini aniqlash uchun yaramaydi.

D plastinkani ixtiyoriy chiziqlar bilan n ta kichik $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ yuzchalarga ajratib har bir ΔS_k yuzchada bittadan $P(x_k, y_k)$ nuqtani olamiz. Agar ΔS_k yuzcha juda kichik bo'lsa, u holda zichlik γ_k nuqtadagi $\gamma_k = \gamma(x_k, y_k)$ zichlikdan juda kam farq qiladi. Har bir ΔS_k yuzchaning barcha nuqtalarida zichlik o'zgarmas va u taqriban tanlangan γ_k nuqtadagi zichlikka teng deb hisoblab ΔS_k yuzchaning massasi Δm_k ni taqriban hisoblaymiz:

$$\Delta m_k \approx \gamma_k \Delta S_k = \gamma(x_k, y_k) \Delta S_k \quad k = 1, n.$$

D plastinkaning massasi $m = \sum_{k=1}^n \Delta m_k$ bo'lganligi sababli uni hisoblash uchun

$$m = \sum \Delta m_k^n \approx \sum_{k=1}^n \gamma(x_k^n, x_k^n) \Delta S_{k=1}$$

taqribiy tenglikka ega bo'lamiz.

Izlanayotgan massaning aniq qiymati sifatida $\sum \gamma(x_k^n, x_k^n) \Delta S_k$ yig'indini $\max diam \Delta S \rightarrow 0$ dagi limitni qabul qilamiz. Bu yig'indi D sohada uzluksiz $\gamma = \gamma(x, y)$ funksiya uchun integral yig'indi bo'lganligi sababli u $\max diam \Delta S_k \rightarrow 0$ da aniq chekli

$$\iint_D \gamma(x, y) dx dy$$

limitga ega bo'ladi.

Shunday qilib D plastinkaga joylashgan modda massasi sirt zichligidan D soha bo'yicha olingan ikki o'lchovli integralga teng bo'lar ekan:

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy$$

Ikki o'lchovli integralning **mexaniq ma'nosi** shundan iborat.

Xulosa

Mazkur kurs ishida ikki o'lchovli integrallar nazariyasi, ularni hisoblashning turli usullari, o'zgaruvchilarni almashtirish metodi, Yakobi determinantining mazmuni va qutb koordinatalarida integrallashning afzalliklari keng va izchil o'rganildi. Ikki o'lchovli integrallar matematik analizning eng muhim bo'limlaridan biri bo'lib, ko'p o'lchamli fazolarda maydon, massa, zichlik, oqimlar, energiya taqsimoti va boshqa fizik kattaliklarni aniqlashda asosiy vosita hisoblanadi. Shu bois, ularning nazariy asoslarini chuqur o'rganish nafaqat matematikadagi masalalarni, balki fizikada, geometriyada, iqtisodiyotda, muhandislik hisoblarida uchraydigan ko'plab amaliy jarayonlarni to'g'ri tahlil qilish imkonini beradi.

Kurs ishida o'zgaruvchilarni almashtirish usuli alohida tahlil qilindi. Bu metod integrallash hududining murakkab shakllarini soddaroq, qulayroq koordinata sistemasiga o'tkazib, integralni hisoblashning aniq va samarali yo'lini beradi. Transformatsiya jarayonida yuz beradigan geometrik o'zgarishlarni tavsiflashda Yakobi determinantining tutgan o'rni juda muhimdir. Yakobi maydon elementining qanday o'zgarishini ko'rsatib,

transformatsiya ostida integralning qiymati saqlanishini ta'minlaydi. Shuning uchun Yakobi determinantini to'g'ri aniqlash ikki o'lchovli integralni hisoblashning zarur bosqichidir.

Qutb koordinatalari esa ikki o'lchovli integrallarda eng ko'p qo'llaniladigan maxsus koordinata tizimlaridan biri sifatida keng yoritildi. Aylana, halqa, sektor, fazoviy simmetriyaga ega hududlar va radiusga bog'liq funksiyalar ustida integrallashda qutb koordinatalari hisoblash jarayonini sezilarli darajada soddalashtirishi qayd etildi. Ayniqsa, hudud shakli markaziy simmetriyaga ega bo'lgan hollarda qutb koordinatalari minimal algebraik murakkablik bilan aniq natija olish imkonini beradi.

Umuman olganda, kurs ishida o'rganilgan mavzular bir-biri bilan uzviy bog'liq bo'lib, ikki o'lchovli integrallarni hisoblashning nazariy asoslari, transformatsiya usullari va maxsus koordinata tizimlaridan samarali foydalanish bo'yicha to'liq tasavvur hosil qilindi. Ushbu bilimlar ko'plab ilmiy-amaliy yo'nalishlarda qo'llanilishi, murakkab integrallash masalalarini soddalashtirish, hisoblash jarayonini takomillashtirish va aniq natijalarga erishish uchun keng imkoniyat yaratadi. Mazkur mavzuning o'rganilishi bo'lajak mutaxassislar uchun matematik analiz bo'yicha nazariy tayyorgarlikni mustahkamlash va amaliy masalalarni yechish ko'nikmalarini rivojlantirishga xizmat qiladi.

Quyida "Ikki o'lchovli integrallar, o'zgaruvchilarni almashtirish, qutb koordinatalarida hisoblash va ularning tadbiqlari" mavzusi uchun keng va mazmunli foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati keltiriladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. А.А. Маркушевич. Краткий курс высшей математики. — Москва: Наука, 2012.
2. Г.М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, Т.2. — Москва: Физматлит, 2014.
3. Колмогоров А.Н., Кусмин М.А. Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва: МГУ, 2016.

4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, Т.2. — Москва: Наука, 2013.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление, Т.2. — Москва: Наука, 2011.
6. Левин С.И. Многомерные интегралы и координатные преобразования. — Санкт-Петербург: БХВ, 2015.
7. Anton H., Bivens I., Davis S. Calculus: Multivariable. — Wiley, 2019.
8. James Stewart. Multivariable Calculus. — Cengage Learning, 2020.
9. Thomas G.B., Finney R. Calculus and Analytical Geometry. — Addison-Wesley, 2018.
10. Briggs W., Cochran L. Calculus for Scientists and Engineers. — Pearson, 2016.
11. Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics. — Wiley, 2021.
12. Apostol T. Calculus, Volume II: Multivariable Calculus and Linear Algebra. — Wiley, 2019.
13. Spivak M. Calculus on Manifolds. — Westview Press, 2018.
14. Варянский И.Э. Координатные преобразования в многомерном анализе. — Москва, 2017.
15. Мудров А., Логинов Д. Математический анализ: интегралы нескольких переменных. — СПб: Питер, 2020.