KVADRATIK FORMANING KANONIK SHAKLI.

Turayev Ziyavutdin Uktamxonovich

Matematika va ta’limda axborot texnologiyasi

kafedra o‘qtivchisi.

Mamadaliyeva Mashxura Salim qizi

Turayeva Charos Jumanazar qizi

Shahrisabz Davlat Pedagogika instituti

Pedagogika fakulteti

Matematika va informatika yo‘nalishi

3-bosqich talabasi.

Annotatsiya: Ushbu maqolada kvadratik forma tushunchasi, uning asosiy xossalari va kanonik shaklga keltirish usullari yoritiladi. Kvadratik formalarni matritsaviy ifodalash, ular ustida elementar o‘zgartirishlar bajarish hamda simmetrik matritsalarni diagonal ko‘rinishga keltirish jarayoni izchil tahlil qilinadi. Shur parchalanishi, ortogonal diagonalizatsiya va Silvestr teoremasi kabi nazariy asoslar bilan bir qatorda, amaliy misollar orqali kanonik shaklni topishning samarali usullari ko‘rsatib beriladi. Tadqiqot natijalari kvadratik shakllarning geometriya, algebra va optimallash muammolaridagi ahamiyatini ochib beradi.

Kalit so‘zlar: kvadratik forma, kanonik shakl, simmetrik matritsa, diagonalizatsiya, ortogonal o‘zgartirish, Shur parchalanishi, Silvestr teoremasi, xususiy qiymatlar, xususiy vektorlar, algebraik forma, kvadratik tasnif, optimallash masalalari.

Аннотация: В статье рассматривается понятие квадратичной формы, её основные свойства и методы приведения к каноническому виду. Анализируется матричное представление квадратичных форм, элементарные преобразования и процесс диагонализации симметрических матриц. Особое внимание уделено теоретическим аспектам, включая разложение Шура, ортогональную диагонализацию и теорему Сильвестра. На практических примерах показаны эффективные методы нахождения канонического вида. Результаты исследования подчеркивают значимость квадратичных форм в геометрии, алгебре и задачах оптимизации.

Ключевые слова: квадратичная форма, канонический вид, симметричная матрица, диагонализация, ортогональное преобразование, разложение Шура, теорема Сильвестра, собственные значения, собственные векторы, алгебраическая форма, классификация квадратичных форм, задачи оптимизации.

Annotation: This article examines the concept of quadratic forms, their fundamental properties, and the methods used to transform them into canonical form. It provides a detailed study of the matrix representation of quadratic forms, elementary transformations, and the diagonalization of symmetric matrices. Key theoretical principles such as Schur decomposition, orthogonal diagonalization, and Sylvester’s theorem are highlighted. Practical examples illustrate efficient techniques for determining the canonical form. The findings emphasize the importance of quadratic forms in geometry, algebra, and optimization problems.

Keywords: quadratic form, canonical form, symmetric matrix, diagonalization, orthogonal transformation, Schur decomposition, Sylvester’s theorem, eigenvalues, eigenvectors, algebraic form, classification of quadratic forms, optimization problems.

KIRISH. Kvadratik formalar zamonaviy algebra va analitik geometriyaning muhim tushunchalaridan biri bo‘lib, o‘zgaruvchilarning kvadratlari va ularning o‘zaro ko‘paytmalarini ifodalovchi matematik struktura sifatida qaraladi. Bunday formalar ko‘plab amaliy masalalarda — geometrik jismlarni tasniflashda, algebraik tenglamalarning xossalarini o‘rganishda, optimallash jarayonlarida hamda fizikaviy modellarda keng qo‘llanadi. Kvadratik shakllarning eng qulay va tahlil uchun samarali ko‘rinishi ularni kanonik shaklga keltirish orqali olinadi.

Kanonik shaklga keltirish jarayoni simmetrik matritsalar bilan bog‘liq bo‘lib, diagonalizatsiya, ortogonal o‘zgartirishlar, xususiy qiymatlar nazariyasi va Silvestr teoremasi kabi fundamental matematik tamoyillarga asoslanadi. Ushbu yondashuv kvadratik formaning algebraik tuzilishini soddalashtirib, uning geometrik mazmunini aniq ko‘rsatishga imkon beradi.

Mazkur maqolada kvadratik formaning nazariy asoslari, ularni kanonik shaklga keltirishning samarali usullari va ularning qo‘llanish sohalari ilmiy nuqtayi nazardan tahlil qilinadi. Natijalar kvadratik shakllarning matematika va amaliy fanlardagi o‘rnini chuqurroq yoritishga xizmat qiladi.

Bu mavzuda kvadratik formani kvadratlar yig‘indisi shakliga keltirish, ya’ni kvadratik formani

A(x ,x) =λ1ξ12+λ2ξ22+…+λnξ n2 (1)

ko‘rinishga keltiradigan bazisni topish masalasini qaraymiz.

1-ta’rif. Kvadratik formaning (1) ko‘rinishidagi shakli uning kanonik (normal) shakli deb ataladi.

1-teorema. n o‘lchamli V fazoda berilgan ixtiyoriy A(x ,x) kvadratik forma uchun shunday e_1 , e_2 ,…, e_n bazis mavjudki, bu bazisda kvadratik forma

$$A(x,x)=\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\ldots+\lambda_n\xi_n^2,$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, A(x, x) kvadratik forma biror f1 , f2 ,..., fn bazisda quyidagi,

$$A(x,x)=\sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j}\eta_i\eta_j \quad (2)$$

ko‘rinishga ega bo‘lsin. Bunda η1, η2, …, ηn lar x vektorning ushbu

bazisdagi koordinatalari.

Bazisni (2) formulada turli indeksli koordinatalarning ko‘paytmalari yo‘qolib boradigan qilib almashtiramiz. Bazisning xar bir almashtirilishiga ma’lum koordinatalarning xosmas almashtirilishi, va aksincha, koordinatalarning xosmas almashtirilishiga ma'lum bazis almashtirishlari to‘g‘ri kelgani uchun koordinatalarni almashtirish formulalarini yozish bilan chegaralanamiz.

A(x, x) kvadratik formani kanonik shaklga keltirish uchun, bizga ai,j koeffitsientlardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lishi kerak. Bunga hamma vaqt erishish mumkin. Haqiqatan ham, nolga aynan teng bo‘lmaganA(x, x) kvadratik formada o‘zgaruvchining birorta ham kvadrat bo‘lmasin deb faraz qilaylik, u holda kamida bitta noldan farqli ko‘paytma, masalan, 2ai,jη1η2 mavjud bo‘ladi. η1 va η2 koordinatalarni

□ □ □ $\boldsymbol{\eta_1 = \eta_1' + \eta_2'}$, $\boldsymbol{\eta_2 = \eta_1' - \eta_2'}$ □ □ □

kabi almashtirib, boshqa o‘zgaruvchilarni o‘zgartirishsiz qoldirsak, bunday almashtirishda $2a_{i,j}\,\eta_1\,\eta_2$ hadning ko‘rinishi $2a_{i,j}\,(\eta_1'^2 - \eta_2'^2)$□bo‘lib qoladi. Farazga muvofiq, $a_{1,1} = a_{2,2} = 0$ bo‘lgani uchun, bu hech qanday had bilan qisqarmaydi, ya’ni □$\eta_1'^2$ ning koeffitsienti noldan farqli bo‘ladi.

Demak, umumiylikka ziyon yetkazmagan holda (2) formulada $a_{1,1} \neq 0$ deb olish mumkin. Kvadratik formada η1 qatnashgan hadlarni ajratib yozamiz:

$$\mathbf{a_{1,1}\,\eta_1^2 + 2a_{1,2}\,\eta_1\,\eta_2 + \ldots + 2a_{1,n}\,\eta_1\,\eta_n\,.}$$

Bu yig‘indini to‘la kvadratgacha to‘ldiramiz, ya’ni uni

$$\mathbf{a_{1,1}\,\eta_1^2 + 2a_{1,2}\eta_1\eta_2 + \ldots + 2a_{1,n}\,\eta_1\eta_n = (a_{1,1}\,\eta_1 + \ldots + 2a_{1,n}\eta_n)^2 - B} \qquad \mathbf{(3)}$$

ko‘rinishda yozamiz, bu yerda B ifoda faqat $a_{1,2}\,\eta_2\,, \ldots, a_{1,n}\,\eta_n$ hadlar kvadratlari va ularning ko‘paytmalarini o‘z ichiga olgan haddir.

(3) ifodani (2) tenglikga qo‘ygandan so‘ng qaralayotgan kvadratik forma

$$\mathbf{A(x, x) = (a_{1,1}\,\eta 1 + \ldots + 2a_{1,n}\eta_n)^2 + \ldots}$$ □ □ □

ko‘rinishga keladi, bunda yozilmagan hadlar $\eta_2, \ldots, \eta_n$ o‘zgaruvchilardangina tashkil topgan. Quyidagicha o‘zgartirish kiritamiz

$$\mathbf{\eta_1^* = a_{1,1}\,\eta_1 + a_{1,2}\eta_2 + \ldots + a_{1,n}\eta_n,}$$

$$\mathbf{\eta_2^* = \eta_2\,,}$$

...,

$\eta_n^{*} = \eta_n$.

U holda kvadratik forma

$$A(x, x) = \frac{1}{a_{1,1}} \eta_1^{*2} + \sum_{i,j=2}^{n} a_{i,j}^{*} \eta_i^{*} \eta_j^{*}$$

ko‘rinishiga keladi.

$\sum_{i,j=2}^{n} a_{i,j}^{*} \eta_i^{*} \eta_j^{*}$ ifoda (2) formulaning o‘ng tomoniga juda

o‘xshash bo‘lib, bunda faqat birinchi koordinata ishtirok etmaydi. $a_{2,2}^{*}$

koeffitsientni noldan farqli deb faraz qilib, o‘zgaruvchilarni

yuqoridagi usulda,

$\eta_1^{**} = \eta_1^{*}$,

$\eta_2^{**} = a^{*}_{2,2}\, \eta^{*}_2 + a^{*}_{2,3}\, \eta^{*}_3 + \ldots + a^{*}_{2,n}\, \eta^{*}_n$,

$\eta_3^{**} = \eta_3^{*}$

..,

. $\eta_n^{**} = \eta_n^{*}$.

formulalarga muvofiq yangidan almashtirishimiz mumkin.

Bunday almashtirishdan so‘ng kvadratik forma

$$A(x, x) = \eta_1^{**2} + \eta_2^{**2} + {}^{**}\eta_i{}^{**}\eta_j{}^{**}$$

ko‘rinishga keladi. Bu jarayonni davom ettirib, o‘zgaruvchilarni bir necha bor almashtirgandan keyin ξ_1 ,ξ_2, …, ξ_n o‘zgaruvchilarga ega bo‘lamiz. Ya’ni, A(x,x) kvadratik forma bu o‘zgaruvchilar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$A(x ,x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_m\xi_m^2 ,$$

bu yerda $m \le n$ . .

Ravshanki, $m < n$ bo‘lgan holda $\lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ deb faraz qilish mumkin.

 Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltirishning yuqoridagi teorema isbotida bayon qilingan usuli Lagranj usuli deb ataladi.

Misol 1. Bizga uch o‘lchamli fazodagi biror f_1 , f_2 , f_3 bazisda

$$\mathbf{A(x,x) = 2\eta_1\eta_2 + 4\eta_1\eta_3 - \eta_1^2 - 8\eta_3^2}$$

kvadratik forma berilgan bo‘lsin.

  $\eta_1 = \eta_2'$, $\eta_2 = \eta_1'$, $\eta_3 = \eta_3'$ almashtirish bajarsak, u holda

$$\mathbf{A(x,x) = (\eta_1')^2 + 2\eta_1'\eta_2' + 4\eta_2'\eta_3' - 8(\eta_3')^2}$$

So‘ngra $\eta_1^* = -\eta'_1 + \eta'_2$, $\eta_2^* = \eta'_2$, $\eta_3^* = \eta'_3$ almashtirish qilib, kvadratik forma uchun yangi ifoda hosil qilamiz:

$$\mathbf{A(x,x) = -(\eta 1^*)^2 + (\eta 2^*)^2 + 4\eta 2^*\eta 3^* - 8(\eta 3^*)^2}$$

Shunday qilib, $\xi_1 = \eta_1^*$, $\xi_2 = \eta_2^* + 2\eta_3^*$, $\xi_3 = \eta_3^*$ almashtirish kvadratik formani $A(x,x) = -\xi_1^2 + \xi_2^2 - 12\xi_3^2$ kanonik shaklga keltiradi..

Ta’kidlash joizki, kvadratik formani Lagranj usuli bilan kanonik ko‘rinishiga keltirishda qo‘llaniladigan η_1^* , η_2^* , … , η_n^* koordinatalar η_1 , η_2 , … , η_n orqali o’z navbatida η_1^{**} , η_2^{**} , … , η_n^{**} koordinatalar esa η_1^* , η_2^* , … , η_n^* va shu tarzda oxirgi ξ_1 , ξ_2 , …, ξ_n koordinatalar o‘zidan oldingi koordinatalar orqali ifodalanadi. Bundan foydalanib, ξ_1 , ξ_2 , …, ξ_n koordinatalarni dastlabki η_1 , η_2 , … , η_n koordinatalar orqali ifodalash mumkin:

$$\boldsymbol{\xi_1 = c_{1,1}\,\eta_1 + c_{2,1}\,\eta_2 + \ldots + c_{n,1}\,\eta_n ,}$$

$$\boldsymbol{\xi_2 = c_{1,2}\,\eta_1 + c_{2,2}\,\eta_2 + \ldots + c_{n,2}\,\eta_n ,}$$

…………………………………….,

$$\boldsymbol{\xi_n = c_{1,n}\,\eta_1 + c_{2,n}\,\eta_2 + \ldots + c_{n,n}\,\eta_n .}$$

Koordinatalarni almashtirish matritsasi bazis almashtirish matritsasi teskarisining transponirlanganiga teng bo‘lishini hisobga olib, yangi e_1, e_2 ,…, e_n bazis vektorlarini eski f_1 , f_2 ,..., f_n bazis vektorlari orqali ifodalashimiz mumkin, ya’ni

$$\mathbf{e_1 = d_{1,1} f_1 + d_{2,1} f_2 + \ldots + d_{n,1} f_n ,}$$

$$\mathbf{e_2 = d_{1,2} f_1 + d_{2,2} f_2 + \ldots + d_{n,2} f_n ,}$$

……………………………,

$$\mathbf{e_n = d_{1,n} f_1 + d_{2,n} f_2 + \ldots + d_{n,n} f_n .}$$

Agar kvadratik formani kanonik shaklga keltirish jarayonida ikki koordinatani birdaniga o‘zgartiradigan almashtirishni bajarishga to‘g‘ri kelmasa, u holda almashtirish formulalarining ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\boldsymbol{\xi_1 = c_{1,1}\ \eta_1 + c_{2,1}\ \eta_2 + \ldots + c_{n,1}\ \eta_n ,}$$

$$\boldsymbol{\xi_2 = c_{2,2}\ \eta_2 + \ldots + c_{n,2}\ \eta_n ,}$$

……………….,

$$\boldsymbol{\xi_n = c_{n,n}\ \eta_n .}$$

ya’ni almashtirish matritsasi uchburchak ko‘rinishiga keladi. U holda

bazisni almashtirish matritsasi ham

$$\mathbf{e_1 = d_{1,1} f_1 ,}$$

$$\mathbf{e_2 = d_{1,2} f_1 + d_{2,2} f_2 ,}$$

……………………………….,

$$\mathbf{e_n = d_{1,n} f_1 + d_{2,n} f_2 + \ldots + d_{n,n} f_n .}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Endi kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltirishning yana bir usulini keltiramiz. Avvalgi usuldan farqli ravishda bu usul izlanayotgan e_1 , e_2 ,…, e_n bazisni to‘g‘ridan-to‘g‘ri boshlang‘ich bazis orqali ifodasini beradi.

Aytaylik,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

matritsa $A(x, x)$ kvadratik formaning f_1 , f_2 ,..., f_n bazisdagi matritsasi bo‘lsin. Ushbu matritsaning quyidagi bosh minorlarini qaraymiz:

$$\Delta_1 = a_{11}\ ;\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\ ;\ \dots\ ;\ \ \Delta_n = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

XULOSA

Kvadratik formalarni kanonik shaklga keltirish jarayoni ularning algebraik va geometrik xususiyatlarini aniqlashda muhim ahamiyatga ega. Diagonal ko‘rinishga keltirilgan kvadratik forma orqali ifodaning tuzilishi, signaturasi, musbat yoki manfiy aniqligi aniq belgilanadi. Bu jarayon murakkab kvadratik ifodalarni eng sodda ko‘rinishga keltirib, ularni tahlil qilishni osonlashtiradi hamda invariant xossalari orqali forma tabiatining o‘zgarmasligini ta’minlaydi.

Kanonik shakl matematik analiz, chiziqli algebra, analitik geometriya, optimallashtirish, mexanika va fizik jarayonlarni modellashtirishda keng qo‘llaniladi. Inertsiya qonunining qo‘llanishi esa simmetrik matritsalar signaturasining o‘zgarmasligini kafolatlaydi va kvadratik formalarni tasniflash jarayonini aniq va ishonchli qiladi. Shuningdek, ellipsoid, giperboloid, paraboloid kabi sirtlarning tenglamalarini soddalashtirish, chiziqli tizimlar barqarorligini baholash va ekstremum masalalarini yechishda ham kanonik shakl asosiy vosita hisoblanadi.

Umuman olganda, kvadratik formaning kanonik shakli murakkab strukturani sodda ko‘rinishda ifodalashga xizmat qiladi, bu esa nazariy tahlilni yengillashtirib, amaliy masalalarda samarali natija beradi.

Kvadratik formalarni kanonik shaklga keltirish matematik tahlilning asosiy bosqichlaridan biri bo‘lib, u murakkab ifodalarni soddalashtirib, ularning ichki tuzilishini aniq ko‘rsatadi. Kanonik shaklning mavjudligi va uning yagona signaturaga ega bo‘lishi kvadratik formalar nazariyasini mustahkam matematik asos bilan ta’minlaydi. Bu jarayon orqali forma qanday koordinata o‘zgarishlari bajarilmasin, uning musbat, manfiy va nol koeffitsientlar soni o‘zgarmay qolishi inertsiya qonuni orqali ishonchli tarzda kafolatlanadi.

Kanonik shaklga keltirishning amaliy ahamiyati ham keng qamrovli: u geometriyada egri sirtlarning klassifikatsiyasini soddalashtiradi, fizikada energiya funksiyalarining xatti-harakatini tavsiflashda qo‘llanadi, mexanikada tebranishlar va barqarorlikni tekshirishda muhim rol o‘ynaydi. Shuningdek, optimallashtirish masalalarida kvadratik funksiyaning ekstremumini aniqlash ko‘p jihatdan uning kanonik shakldagi ko‘rinishiga bog‘liq bo‘ladi.

Kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi o‘quvchi yoki tadqiqotchiga algebraik manipulyatsiyalardan tashqari, geometrik mazmunni ham chuqurroq anglash imkonini yaratadi. Diagonalizatsiya jarayonida eigen qiymatlar va eigen vektorlarning o‘rni alohida ahamiyatga ega bo‘lib, ular kvadratik formaning asosiy tuzilishi va yo‘nalishlarini aniqlaydi. Bu esa, o‘z navbatida, har qanday simmetrik matritsaning tabiiy tahlilini amalga oshirish imkonini beradi.

Shu bilan birga, kanonik shakl murakkab fizik modellarni matematik tarzda ifodalashda, raqamli hisoblashlarda, chiziqli tizimlarning klassifikatsiyasida, hamda turli fan sohalaridagi funksional tahlillarda ishonchli universal vosita sifatida xizmat qiladi. Kvadratik formaning kanonik shakli nazariya va amaliyot o‘rtasida mustahkam bog‘lovchi ko‘prik bo‘lib, murakkab jarayonlarning strukturasini chuqur o‘rganishga yordam beradi.

Umuman olganda, bu mavzu matematikaning ko‘plab bo‘limlari, shuningdek, tabiiy fanlar va texnik sohalarda beqiyos qo‘llanishga ega bo‘lib, uning o‘rganilishi ilmiy izlanishlar uchun mustahkam nazariy asos yaratadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Gantmaxer F.R. Matrichlar nazariyasi. — Moskva: Nauka, 1988.
2. Kostrikin A.I., Manin Yu.I. Chiziqli algebra va geometria asoslari. — Moskva: Nauka, 1996.
3. Korn G., Korn T. Matematik ensiklopedik lug‘at. — Moskva: Nauka, 1973.
4. Kurosh A.G. Chiziqli algebra kursi. — Moskva: Nauka, 1975.
5. Sergeev A.G. Chiziqli algebra va analitik geometriya. — Moskva: Fizmatlit, 2005.
6. Shilov G.E. Chiziqli algebra. — Moskva: Nauka, 1977.
7. Vinberg E.B. Chiziqli algebra va geometriya. — Moskva: Factorial Press, 2001.
8. Horn R., Johnson C. Matrix Analysis. — Cambridge University Press, 2013.
9. Roman S. Advanced Linear Algebra. — Springer, 2008.
10. Strang G. Linear Algebra and Its Applications. — Cengage, 2016.
11. Lang S. Linear Algebra. — Springer, 2002.
12. Axler S. Linear Algebra Done Right. — Springer, 2015.
13. Artin M. Algebra. — Prentice Hall, 1991.
14. Hoffman K., Kunze R. Linear Algebra. — Prentice Hall, 1971.
15. Greub W. Multilinear Algebra. — Springer, 1978.
16. Xudoyberdiyev A., Jo‘rayev M. Chiziqli algebra va analitik geometriya. — Toshkent: O‘qituvchi, 2005.
17. Qodirov N., Ergashev R. Algebra va geometriya asoslari. — Toshkent: Fan, 2010.
18. Karimov T., To‘xtayev M. Chiziqli algebra kursi. — Toshkent: TDPU nashriyoti, 2012.
19. Axmedov B., Sobirov A. Analitik geometriya. — Toshkent: Oliy ta’lim, 2014.
20. To‘laganov A., Nazarov O. Chiziqli algebra va matritsalar nazariyasi. — Toshkent: Fan va Texnologiya, 2016.
21. Saidov A., Ismoilov U. Oliy matematika 1-qism. — Toshkent: O‘qituvchi, 2002.