

**“ISHORA NAVBATLASHUVCHI QATORLAR.LEYBNITS
TEOREMASI.ABSOLYUT VA SHARTLI YAQINLASHUVCHI
QATORLAR,ULARNING XOSSALARI”**

Shahrisabz Davlat Pedagogika Instituti

“Matematika Va Ta’limda Axborot

Texnologiyasi” Kafedrası

Zaxriddinova Sh. Zaxriddin qizi

Matematika va informatika ta’lim yo’nalishi

uchinchi bosqich MI-2.23- guruh talabasi

To’rayeva Charos Jumanazar qizi

KIRISH

Matematik analizning muhim yo’nalishlaridan biri bo’lgan sonli qatorlar nazariyasi fan va texnika taraqqiyoti bilan bevosita bog’liq bo’lib, murakkab jarayonlarni modellashtirish, funksiyalarni tahlil qilish, integrallarni yaqinlashtirib hisoblash hamda algoritmik jarayonlarni qurishda alohida o’rin tutadi. Ayniqsa, ishora navbatlashuvchi qatorlar, ya’ni hadi musbat va manfiy qiymatlar ko’rinishida almashib keladigan qatorlar nazariyasi matematik tahlilning asosiy bo’limlaridan biri hisoblanadi. Bunday qatorlarning xossalari, ularning yaqinlashuv shartlari va tekshirish mezonlari matematik funksiyalarni aks ettirish, limit jarayonlarini tahlil qilish va amaliy hisoblashlarda keng qo’llaniladi.

Ishora almashib boradigan qatorlarning tahlili XVII asrdan beri o’rganib kelinib, bu boradagi eng muhim natijalardan biri Leybnits teoremasi hisoblanadi. Mazkur teorema qatorning yaqinlashuv shartlari, uning qiymatini baholash, xatolik chegarasini aniqlash hamda qatorlar asosida qurilgan hisoblash usullarining ishonchliligini ta’minlashda muhim mezon sifatida xizmat qiladi. Leybnits teoremasining nafaqat nazariy, balki amaliy matematikadagi o’rni ham beqiyos bo’lib, u ko’plab yaqinlashtiruvchi algoritmlar, trigonometrik qatorlar, logarifmik kengaytmalar va maxsus funksiyalarning taqribiy hisoblarida asosiy vosita sifatida qo’llanadi.

Qatorlarning yaqinlashuvi bilan bog‘liq holda absolut va shartli yaqinlashuv tushunchalari ham alohida ahamiyatga egadir. Absolyut yaqinlashuvchi qatorlar matematik tahlilda eng barqaror tizimlar qatoriga kiradi, chunki ularning tartibi o‘zgarmasdan turib ham, o‘zgarganda ham yaqinlashishi ta’minlanadi. Shartli yaqinlashuvchi qatorlarda esa bunday xususiyat mavjud emas: ularning tartibi o‘zgartirilsa, qatorning yig‘indisi ham o‘zgarishi mumkin. Shu sababli bunday qatorlarni o‘rganish matematik jihatdan ham, amaliy hisoblash nuqtai nazaridan ham muhim ahamiyatga ega. Mazkur kurs ishi aynan ushbu uch asosiy yo‘nalishni o‘rganishga qaratilgan bo‘lib, unda ishora navbatlashuvchi qatorlarning nazariy asoslari, Leybnits teoremasining mohiyati va uni qo‘llash usullari, shuningdek, absolut va shartli yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari batafsil yoritiladi. Ish davomida qatorlarning yaqinlashuvini tekshirishning eng ko‘p qo‘llaniladigan mezonlari, ularning matematik mazmuni va amaliy natijalari tahlil qilinadi. Shuningdek, hozirgi zamon hisoblash texnologiyalarida qatorlardan foydalanishning ahamiyati, funksiyalarni taqribiy hisoblashda bu nazariyaning o‘rni va qo‘llanish imkoniyatlari ochib beriladi. Kurs ishining dolzarbligi shundan iboratki, sonli qatorlarning tahlili zamonaviy matematik modellashtirish, kompyuter grafikasi, optimallashtirish usullari, fizik jarayonlarni matematik ifodalash kabi ko‘plab yo‘nalishlarda asosiy vositalardan biri bo‘lib xizmat qiladi. Shuningdek, qatorlarning yaqinlashuv xususiyatlarini chuqur o‘rganish matematik metodlarning aniq va samarali qo‘llanishini ta’minlaydi. Shu sababli ish mavzusi nafaqat fundamental, balki amaliy jihatdan ham katta ahamiyatga ega.

Ishora navbatlashuvchi qator tushunchasi va misollar

Ishora navbatlashuvchi qator matematik analizning asosiy bo‘limlaridan biri bo‘lib, funksiyalarni qator orqali ifodalash, ularni taqribiy hisoblash va yaqinlashuv jarayonlarini o‘rganishda muhim o‘rin tutadi. Mazkur qatorning nomidan ko‘rinib turibdiki, uning hadlari navbatma-navbat musbat va manfiy ishoralar bilan almashinadi. Bu holat qatorning xatti-harakatiga, uning yaqinlashish xususiyatlariga, qoldiq hadlarning kamayish tezligiga va umumiy yig‘indi qiymatining barqarorligiga sezilarli ta’sir ko‘rsatadi.

Ishora navbatlashuvchi qatorning umumiy ko‘rinishi quyidagicha yoziladi:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots$$

Bu yerda ketma-ketlikning umumiy hadi a_n bilan belgilanadi va ishora almashinuvi n ning toqligi yoki juftligiga ko'ra belgilanadi. Matematik adabiyotlarda bu jarayon odatda $(-1)^n$ yoki $(-1)^{n+1}$ kabi ifodalar orqali yoziladi. Wordda bu ifodalar to'g'ri ko'chishi uchun matn shaklida quyidagicha beriladi:

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot b_n$$

Bu yerda $b_n \geq 0$ bo'lgan musbat ketma-ketlikdir. Shunday qilib, qatorning ishorasi $(-1)^{n+1}$ orqali, modul qismi esa b_n ketma-ketligi orqali boshqariladi. Qatorning ishora almashinishi uning xatti-harakatini oddiy musbat qatorlardan tubdan farqlab turadi.

Ishora navbatlashuvchi qatorning asosiy xususiyatlari

Bunday qatorlarning matematik xossalaridan eng muhimi — ularning yaqinlashish shartlari hisoblanadi. Oddiy musbat hadli qatorlarda yaqinlashuv uchun odatda murakkab mezonlar tekshirilsa, ishora navbatlashuvchi qatorlarda ikki asosiy shartning bajarilishi qatorning yaqinlashishini kafolatlaydi. Ushbu shartlar quyidagilardan iborat:

1. $\lim a_n = 0 \ (n \rightarrow \infty)$

1. b_n ketma-ketligi kamayib

boruvchi bo'lishi:

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \geq \dots$$

Agar b_n ushbu ikki shartni bajarsa, u holda $a_n = (-1)^{n+1} b_n$ ko'rinishidagi har qanday qator yaqinlashadi. Bu natija matematik analizda Leybnits teoremasi nomi bilan mashhur. Laybnits teoremasi ishora navbatlashuvchi qatorlarning eng muhim nazariy asosidir.

Klassik misol: garmonik qatorning ishora almashinuvchi shakli

Ishora navbatlashuvchi qatorning eng mashhur misollaridan biri quyidagi qator hisoblanadi:

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \dots$$

Qatorning umumiy hadlari quyidagicha beriladi:

$$a_n = 1/n$$

Lekin ishoralar $(-1)^{n+1}$ orqali belgilanadi. Ushbu qator yaqinlashuvchi qator bo'lib, u $\pi/4$, $\ln 2$ kabi ko'plab matematik konstantalar bilan bog'liq natijalarga olib keladi. Buning

sababi shundaki, $a_n = 1/n$ ketma-ketligi $\lim a_n = 0$ shartni bajaradi, va uning moduli kamayib boradi. Natijada qator Laybnits teoremasiga binoan yaqinlashadi.

Ishora navbatlashuvchi qatorlarning turli shakllari

Ishora almashinuvchi qatorlar turli ko'rinishlarda bo'ladi. Quyida ularning bir necha muhim ko'rinishlarini ko'rib chiqamiz.

1) Oddiy kasrli hadlar asosidagi qator

$$a_n = \frac{2}{(2n-1)} \text{ bo'lsin.}$$

Bu holda qator quyidagicha bo'ladi:

$$2 - 2/3 + 2/5 - 2/7 + 2/9 - \dots$$

Bu qator trigonometrik funksiyalarning qatorlar orqali taqribiy hisoblanishida muhim ahamiyat kasb etadi. Misol uchun, arctan funksiyasi mana shunday qator orqali kengaytiriladi. a_n kengayish hadlari kamaysa va $\lim a_n = 0$ bo'lsa, qator yaqinlashadi.

2) Chiziqli kamayuvchi hadlar asosidagi qator

$a_n = 5/n$ bo'lsa, qator quyidagi ko'rinishga ega:

$$5 - 5/2 + 5/3 - 5/4 + 5/5 - \dots$$

$b_n = 5/n$ ketma-ketligi $\lim b_n = 0$ shartni va kamayish shartini bajaradi. Demak, bu qator ham yaqinlashuvchi hisoblanadi.

3) Kvadratik kamayuvchi ketma-ketlik asosidagi qator

$$a_n = 1 / (n^2)$$

Ushbu qator:

$$1 - 1/4 + 1/9 - 1/16 + 1/25 - \dots$$

ko'rinishida bo'ladi. $1/n^2$ ketma-ketligi juda tez kamayadi, shuning uchun qatorning yaqinlashishi ham juda tez sodir bo'ladi. Bu turdagi qatorlar tebranishlar nazariyasi, Fourye tahlili va spektral metodlarda keng qo'llanadi.

Ishora navbatlashuvchi qatorning yaqinlashish tezligi

Ishora almashinuvchi qatorlarning muhim xususiyatlaridan yana biri — ularning qoldiq hadi R_n ning baholanishidir. Laybnits teoremasiga ko'ra:

$$R_n \leq b_{n+1}$$

Ya'ni qatorning yig'indisini n -haddan keyingi qism bilan taxmin qilganda, xato qiymati b_{n+1} dan oshmaydi. Bu juda qulay natija bo'lib, bu turdagi qatorlarning amaliyotda qo'llanishini osonlashtiradi.

Ishora navbatlashuvchi qatorlarning amaliy qo'llanishi

Bunday qatorlar matematikaning ko'plab bo'limlarida uchraydi:

Fizikada tebranish jarayonlari Elektr zanjirlaridagi o'zgaruvchan tok modellarida Signalni qayta ishlash algoritmlarida

Statistik modellashtirishda

Differensial tenglamalar yechimlarida

Tayloring qatorlari orqali funksiyalarni yaqinlashtirishda

Masalan, $\sin x$ funksiyasining qator orqali kengaytirilishi aynan ishora navbatlashuvchi qatorlar yordamida amalga oshiriladi.

Umumiy ko'rinish. Ishora navbatlashuvchi qatorning umumiy ko'rinishi quyidagicha yoziladi:

Summa ($n = 1$ dan ∞ gacha) $[(-1)^{n+1} \cdot a_n]$

Agar $a_n \geq 0$ bo'lsa va $\lim a_n = 0$ bo'lsa, qator yaqinlashadi.

Leybnits teoremasidan foydalanib qatorlarning yaqinlashuvini tekshirish usullar

Qatorlarning yaqinlashuvini tekshirish matematik analizning eng muhim masalalaridan biri bo'lib, ayniqsa alternatsiyalanuvchi qatorlar uchun Leybnits teoremasi asosiy metodlardan biri hisoblanadi. Alternatsiyalanuvchi qatorlar deb hadlari ishorasi almashinib boradigan qatorlarga aytiladi, ya'ni umumiy holda $S = \sum (-1)^n \cdot a_n$ yoki $S = \sum (-1)^{n+1} \cdot a_n$ ko'rinishida bo'ladi. Bu yerda $a_n \geq 0$ shartini qanoatlantiruvchi ketma-ketlikdir. Leybnits teoremasi alternatsiyalanuvchi qatorlarning yaqinlashuvini aniqlashda juda sodda, shu bilan birga, kuchli vosita bo'lib xizmat qiladi. Ushbu teorema shuni bildiradiki, agar a_n ketma-ketligi musbat bo'lsa, kamayib borsa va $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ sharti bajarilsa, alternatsiyalanuvchi qator yaqinlashadi. Qatorlarning yaqinlashuvini tekshirishning asosiy usullaridan biri ham aynan shu teoremaga tayangan holda amalga oshiriladi.

Qatorning yaqinlashuvi matematik nuqtai nazardan shuni anglatadiki, uning qisman yig'indilari ketma-ketligi chegaraga ega bo'ladi. Alternatsiyalanuvchi qatorlar uchun bu xususiyat juda aniq ko'rinishga ega bo'lib, toq va juft qisman yig'indilar turlicha yo'nalishda yaqinlashadi. Agar qator $S = \sum (-1)^n \cdot a_n$ bo'lsa, unda juft qisman yig'indilar $S_2, S_4, S_6, \dots$ kamayuvchi ketma-ketlik bo'ladi; toq qisman yig'indilar $S_1, S_3, S_5, \dots$ oshuvchi ketma-ketlik bo'ladi. Natijada ularning har ikkisi birdan-bir limitga intiladi. Bu holat Leybnits teoremasi qo'llanilgan qatorlarning yaqinlashuvini tekshirish uchun matematik asos bo'lib xizmat qiladi.

Leybnits teoremasi asosidagi tekshirish usullarining eng muhim tomoni shundaki, qatorning qoldiq hadini baholash juda oson bo'ladi. Agar S_n — n -hadgacha bo'lgan qisman yig'indi, S esa qatorning limit qiymati bo'lsa, qoldiq had $R_n = S - S_n$ quyidagi bog'lanishga ega: $|R_n| \leq a_{n+1}$. Bu esa alternatsiyalanuvchi qatorlarning amaliy hisob-kitoblarida juda katta yengillik yaratadi. Chunki qoldiq haddan kichik bo'lgan har qanday aniqlikka ega yaqinlashishni olish mumkin bo'ladi.

Qatorlarning yaqinlashuvini Leybnits teoremasi yordamida tekshirish usullari quyidagi tamoyillarga asoslanadi: birinchidan, a_n ketma-ketligi musbat bo'lishi; ikkinchidan, a_n kamayib boruvchi bo'lishi; uchinchidan, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ sharti bajarilishi lozim. Ushbu shartlar tekshirilgach, qatorning yaqinlashuvi haqida xulosa chiqarish mumkin bo'ladi. Qator shartli yaqinlashmaydi, balki aniq Leybnits shartlari bajarilgani uchun yaqinlashadi. Shuning uchun ushbu metod alternatsiyalanuvchi qatorlar uchun universal hisoblanadi.

Qatorlarni tekshirish usullarini qo'llashda a_n ketma-ketlikning kamayishini isbotlash muhim ahamiyatga ega. Buning uchun $a_{n+1} \leq a_n$ yoki $f(n+1) \leq f(n)$ kabi xossalardan foydalanish mumkin. Agar a_n funksional ko'rinishda berilgan bo'lsa, uning uzluksiz davomining hosilasini tekshirish yetarli bo'ladi. Masalan, $a_n = 1/n$ bo'lsa, $f(x) = 1/x$ funksiyaning $f'(x) = -1/x^2 < 0$ bo'lgani uchun ketma-ketlik kamayuvchi. Bu esa Leybnits shartlarining bajarilishini tasdiqlaydi.

Qatorlarning yaqinlashuvini tekshirishda muhim amaliy usullardan yana biri — qatorning sonli yaqinlashuvini nazorat qilishdir. Alternatsiyalanuvchi qatorlarda bu jarayon juda sodda, chunki xatolik a_{n+1} dan oshmaydi. Masalan, agar biz garmonik

alternatsiyalanuvchi qatorning $S \approx 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$ yig'indisini aniqlik ε bilan topmoqchi bo'lsak, $a_{n+1} \leq \varepsilon$ shartni bajaruvchi N ni topish kifoya. Bu usul kompyuter hisoblashlarida, matematik modellashtirishda va taqribiy metodlarda juda keng qo'llanadi.

Leybnits teoremasidan foydalanib qatorlarni tekshirishning amaliy namunalari juda ko'p. Eng mashhur misollardan biri — Gregory—Leybnits qatori: $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$. Bu qatorning $a_n = 1/(2n+1)$ ketma-ketligi musbat, kamayuvchi va $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ bo'lgani uchun qator yaqinlashadi. Ammo uning yaqinlashuvi juda sekin bo'lishi mumkin. Shunga qaramay, Leybnits teoremasi yordamida bu qatorning xatosi $|R_n| \leq 1/(2N+3)$ formula orqali aniq baholanadi.

Shuningdek, $\ln(1+x)$ funksiyasining Teylor qatori $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots$ ko'rinishida bo'lib, $x \in (-1, 1]$ intervalda alternatsiyalanuvchi bo'ladi. Bu qator ham Leybnits teoremasiga to'liq mos keladi. Masalan, $x = 1$ bo'lganda qator $\ln 2$ qiymatiga yaqinlashadi. Agar $|x| \leq 1$ bo'lsa, $a_n = |x|^n / n$ ketma-ketlik musbat, kamayuvchi va $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ bo'lganligi uchun Leybnits shartlari bajariladi.

Trigonometrik funksiyalardagi alternatsiyalanuvchi qatorlar ham Leybnits teoremasi orqali tekshiriladi.

$$\begin{aligned} \text{Masalan: } \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Bu qatorlar ham a_n musbat, kamayuvchi va $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ shartlariga mos keladi. Shuning uchun ular ham Leybnits teoremasi bilan yaqinlashadi. Ayniqsa kichik x qiymatlarda qatorlar juda tez yaqinlashadi.

Leybnits teoremasi asosida yana bir tekshirish usuli — qatorning shartli yoki mutlaq konvergentligini ajratishdir. Agar $\sum |a_n|$ divergensiya qilsa, lekin $\sum (-1)^n \cdot a_n$ yaqinlashsa, u holda qator **shartli yaqinlashuvchi** deyiladi. Bunday qatorlar uchun mutlaq yaqinlashuv mezonlari yetarli bo'lmaydi, ammo Leybnits teoremasi yordamida ularning yaqinlashuvi tasdiqlanadi. Shartli yaqinlashuv matematik tahlilda juda muhim tushuncha bo'lib, qatorlarni qayta tartiblash xossalari bilan bog'liq bo'ladi.

XULOSA

Ushbu bob davomida qatorlarning yaqinlashuvi, ularning turlari, absolut va shartli yaqinlashuvning farqlari, Leybnits teoremasining mohiyati va qo'llanishi, navbatlashuvchi qatorlarning xossalari, ularning umumiy xatti-harakati, qayta tartiblashning natijaga ta'siri, shuningdek qatorlarning turli mezonlar asosida tekshirilishi batafsil tahlil qilindi. Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, cheksiz qatorlarning konvergenstsiya masalasi matematik analizning eng markaziy va eng nozik mavzularidan biri bo'lib, uning nazariy asoslari chuqur o'rganishni talab qiladi. Qatorlarning yaqinlashuvi faqatgina hadlarning 0 ga intilishi bilan belgilanmaydi, balki ularning tuzilishi, belgilarning almashinuvi, hadlar o'sishi yoki kamayishi, ularning modul qiymatlarining xatti-harakati, qatorning umumiy kontekstda qanday rol o'ynashi kabi omillar to'laqonli tahlil qilinishi zarur.

Navbatlashuvchi qatorlar, ya'ni $(-1)^n a_n$ yoki $(-1)^{n+1} a_n$ ko'rinishdagi qatorlar o'zining tebranuvchan tabiati orqali ko'plab konvergenstsiya xususiyatlariga ega bo'ladi. Ayniqsa Leybnits teoremasining matematik mohiyati shundan iboratki, agar a_n ketma-ketlik musbat bo'lib, kamayib borsa va $\lim a_n = 0$ bo'lsa, qator yaqinlashadi. Bu mezon qatorlarni tekshirishda eng sodda, eng samarali, shu bilan birga juda ishonchli usullardan biridir. Shu bilan birga, Leybnits mezoni navbatlashuvchi qatorlarning qoldiq haddi R_n ning qiymatini baholashga ham imkon beradi. Chunki $|R_n| \leq a_{n+1}$ tengsizligi xatolikni oldindan aniqlash, hisoblash ishlarini aniqroq qilish, funksiyalarni yaqinlashtirishda qulay imkon yaratadi. Bu jihatlardan nafaqat nazariy matematika uchun, balki amaliy hisoblashlarda, masalan, logarifmik, trigonometriya, arktangens, arksinus, eksponent funksiyalarni Teylor qatori orqali hisoblashda, fizik modellarni yaqinlashtirishda, statistik hisob-kitoblarda, ixcham algoritmlar tuzishda katta ahamiyatga ega.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

Raxmonov T. *Matematik analiz kursi*. – Toshkent: O'qituvchi, 2018.

Jo'rayev A. *Oliy matematika asoslari*. – Toshkent: Fan, 2015.

Mamatqulov B. *Matematik analizdan ma'ruzalar to'plami*. – Toshkent: TMI, 2019.

Matchonov S., Jo'rayev A. *Matematika: Oliy o'quv yurtlari uchun darslik*. – Toshkent: Fan, 2016.

Karimov N. *Chiziqli algebra va matematik analiz*. – Toshkent: TDPU, 2020.

Xabibullayev P. *Funksiyalar nazariyasi*. – Toshkent: Fan, 2017.

Usmonxo'jayev T. *Matematik analizdan mashqlar to'plami*. – Toshkent: O'qituvchi, 2014.

Sodiqov I., Haydarov B. *Oliy matematika*. – Toshkent: Universitet, 2013.

To'xtayev A. *Matematik tahlil asoslari*. – Toshkent: Fan, 2021.

Ismoilov Z. *Differensial hisob nazariyasi*. – Nukus: Bilim, 2016.

Yo'ldoshev Q. *Integral hisob asoslari*. – Toshkent: Fan, 2015.

Raximov M. *Qatorlar nazariyasi va ularning qo'llanishi*. – Toshkent: TDPU, 2022.

G'ulomov T. *Matematik analiz I-jild*. – Toshkent: Universitet, 2012.

G'ulomov T. *Matematik analiz II-jild*. – Toshkent: Universitet, 2012.

Haydarov R. *Limitlar va uzluksizlik nazariyasi*. – Toshkent: Fan, 2018.

Yunusov F. *Oliy matematika masalalar to'plami*. – Toshkent: O'qituvchi, 2019.

Ergashev S. *Matematik mantiq va analiz elementlari*. – Toshkent: TDPU, 2020