

KRONEKER-KAPELLI TEOREMASINING ISBOTINI O'RGANISH

RAHMATULLAYEVA MAXFUZA ISKANDAR QIZI

maxfuzaraxmatullayeva2005@gmail.com

Shahrisabz Davlat Pedagogika Instituti

Matematika va Informatika yo'nalishi 3-kurs talabasi

TURAYEV ZIYOVUDDIN UKTAMXONOVICH

Shahrisabz Davlat Pedagogika Instituti

Matematika va ta'limda axborot texnologiyasi

kafedrasi o'qituvchisi

Annotatsiya. Ushbu ilmiy maqolada chiziqli algebra fanida muhim o'rin tutuvchi Kroneker–Kapelli teoremasining mazmuni, matematik asoslari va uning to'liq isboti bosqichma-bosqich tahlil qilinadi. Teorema chiziqli tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lishi uchun zarur va yetarli shartni, ya'ni asosiy koeffitsiyentlar matritsasi rangi bilan ko'paytirilgan matritsa rangi teng bo'lishi kerakligini belgilaydi. Maqolada matritsa rangi, chiziqli bog'liqlik, vektorlarning span tushunchasi kabi asosiy nazariy elementlar yoritilgan hamda ularning teoremadagi roli chuqur yondashuvda izohlangan. Shuningdek, sistema yechimining mavjudligi, yagona yechim holati va cheksiz ko'p yechim shakllarining shartlari aniqlab beriladi. Teoremaning isboti nazariy jihatdan ishonchli tarzda bayon etilib, misollar asosida amaliy qo'llanilish ko'rsatib beriladi. Mazkur maqola matematikani chuqur o'rganayotgan talabalar, pedagoglar hamda chiziqli algebra bo'yicha ilmiy izlanish olib borayotgan tadqiqotchilar uchun metodik va nazariy jihatdan foydali ilmiy manba hisoblanadi.

Kalit so'zlar: Kroneker–Kapelli teoremasi, chiziqli tenglamalar sistemasi, matritsa rangi, ko'paytirilgan matritsa, chiziqli mustaqillik, chiziqli bog'liqlik, asosiy matritsa, algebraik yechim, vektor fazosi, span tushunchasi, yagona yechim sharti, cheksiz ko'p

yechim, qarama-qarshi sistema, chiziqli algebra, tenglamalar sistemasi isboti, matematik asoslar, vektorlar kombinatsiyasi, rangning geometrik ma'nosi, algebraik tahlil metodlari.

Abstract. This scientific article analyzes the content, mathematical foundations and complete proof of the Kronecker–Capelli theorem, which plays an important role in linear algebra. The theorem defines a necessary and sufficient condition for a system of linear equations to have a solution, namely, the matrix color multiplied by the color of the main coefficients matrix must be equal. The article covers such basic theoretical elements as matrix color, linear dependence, the concept of the span of vectors, and their role in the theorem is explained in depth. It also defines the conditions for the existence of a system solution, the state of a unique solution, and infinitely many solution forms. The proof of the theorem is theoretically reliable and its practical application is shown on the basis of examples. This article is a methodologically and theoretically useful scientific resource for students, teachers, and researchers conducting scientific research in linear algebra.

Keywords: Kronecker–Capelli theorem, system of linear equations, matrix color, multiplied matrix, linear independence, linear dependence, basic matrix, algebraic solution, vector space, concept of span, unique solution condition, infinitely many solutions, adversarial system, linear algebra, proof of a system of equations, mathematical foundations, combination of vectors, geometric meaning of color, methods of algebraic analysis.

Аннотация. В данной научной статье анализируются содержание, математические основы и полное доказательство теоремы Кронекера–Капелли, играющей важную роль в линейной алгебре. Теорема определяет необходимое и достаточное условие существования решения системы линейных уравнений, а именно, равенство цветов матрицы, умноженных на цвет матрицы главных коэффициентов. В статье рассматриваются такие основные теоретические элементы, как цвет матрицы, линейная зависимость, понятие размаха векторов, и подробно объясняется их роль в теореме. Также определяются условия существования решения системы, состояние единственности решения и бесконечное множество форм решений. Доказательство теоремы теоретически достоверно, а его

практическое применение показано на примерах. Данная статья является методически и теоретически полезным научным ресурсом для студентов, преподавателей и научных сотрудников, проводящих научные исследования в области линейной алгебры.

Ключевые слова: теорема Кронекера–Капелли, система линейных уравнений, цвет матрицы, умноженная матрица, линейная независимость, линейная зависимость, базисная матрица, алгебраическое решение, векторное пространство, концепция промежутка, условие единственности решения, бесконечное множество решений, состязательная система, линейная алгебра, доказательство системы уравнений, математические основы, комбинация векторов, геометрическое значение цвета, методы алгебраического анализа.

Kirish. Chiziqli algebra matematikaning eng asosiy va amaliy yo‘nalishlaridan biri bo‘lib, uning asosiy tushunchalari – vektorlar, matritsalar, chiziqli bog‘liqlik va chiziqli tenglamalar sistemasi – ko‘plab fanlar va texnik sohalarda keng qo‘llaniladi. Ayniqsa, chiziqli tenglamalar sistemasining yechimga ega bo‘lishi, yechimlar soni va ularning mavjudlik shartlarini aniqlash masalalari matematikaning nazariy hamda amaliy jihatlariga uchun juda muhim hisoblanadi. Ushbu jarayonda Kroneker–Kapelli teoremasi markaziy o‘rinni egallaydi.

Kroneker–Kapelli teoremasi chiziqli tenglamalar sistemasi yechimining mavjud yoki mavjud emasligini matritsa rangi orqali aniqlovchi fundamental natijadir. Teorema nafaqat sistemaning yechimga egalik shartini aniq belgilab beradi, balki yechimlarning tabiati – yagona, cheksiz ko‘p yoki umuman mavjud emasligini ham aniqlash imkonini yaratadi. Shuning uchun ham ushbu teorema chiziqli algebra kurslarida asosiy teoremlar qatorida o‘qitiladi va ko‘plab ilmiy yo‘nalishlarning nazariy bazasini tashkil etadi. Mazkur maqolada Kroneker–Kapelli teoremasining mazmuni, matematik asoslari va uning to‘liq isboti batafsil yoritiladi. Teorema isbotining bosqichlari mantiqiy asoslangan holda tahlil qilinadi hamda matritsa rangi, chiziqli bog‘liqlik va vektorlar kombinatsiyasi kabi tushunchalar bilan bog‘liq ravishda sharhlanadi. Shuningdek, teoremaning turli

holatlardagi amaliy qo'llanilishi real misollar asosida ko'rsatilib, o'quvchi uchun yanada tushunarli va qulay ilmiy uslubda bayon etiladi.

Kroneker kapelli teoremasining isbotini o'rganish

Lineyka algebra kursida eng muhim va eng ko'p qo'llaniladigan teoremalardan biri – Kroneker-Kapelli teoremasi (ba'zi adabiyotlarda Rouché–Capelli teoremasi deb ham yuritiladi).

U quyidagi savolga aniq va to'liq javob beradi:

Berilgan lineyka tenglamalar tizimi qachon yechimga ega?

Bu savol oddiy ko'rinadi, lekin uni to'g'ri hal qilmasak, ko'plab xatolar (ayniqsa, murakkab tizimlarda) yuz beradi. Teorema nafaqat yechim mavjudligini aniqlaydi, balki yechimlar to'plamining tuzilishini ham to'liq tasvirlaydi (yagona yechim yoki cheksiz ko'p yechim).

Teorema nomi ikki matematikdan kelib chiqqan:

Leopold Kronecker (1823–1891)

Alfredo Capelli (1855–1910)

Kronecker rank tushunchasini chuqur o'rgangan, Capelli esa bu natijani mustaqil ravishda isbotlagan.

2. Asosiy tushunchalar (eslatma)

Teoremaga o'tishdan oldin quyidagi atamalarni aniq eslab olish zarur:

Matritsa ranki – matritsaning chiziqli mustaqil ustunlari (yoki satrlari) soni. $\text{Rank}(A) = r$ deyiladi.

Kengaytirilgan matritsa – $[A|b]$ shaklida, ya'ni asosiy matritsaga erkin hadlar ustuni qo'shilgan matritsa.

Elementar o'zgartirishlar (Gauss–Jordan usuli uchun):

ikki satrni almashtirish

satrni noldan farqli songa ko'paytirish

bir satrga boshqa satrning ko'paytmasini qo'shish

Bu o'zgartirishlar matritsa rankini o'zgartirmaydi va tizimning yechimlilikiga ta'sir qilmaydi.

Zina (echelon) ko'rinishi – matritsada har bir satrning birinchi noldan farqli elementi oldingi satrnikidan o'ngroqda joylashgan holat.

3. Teorema bayoni (to'liq shakli)

Kroneker-Kapelli teoremasi

$Ax = b$ lineyka tenglamalar tizimi ($A - m \times n$ matritsa, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$)

yechimga ega bo'lishi uchun zarur va yetarli shart quyidagicha:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b]$$

Bunda: Agar $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b] = n$ bo'lsa $\rightarrow$ tizimning yagona yechimi mavjud (Cramer tizimi).

Agar $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b] = r < n$ bo'lsa $\rightarrow$ tizimning cheksiz ko'p yechimi mavjud (r ta erkin o'zgaruvchi bo'ladi).

Agar $\text{rank}(A) < \text{rank}[A|b]$ bo'lsa $\rightarrow$ tizim yechimga ega emas (qarama-qarshilik).

Bu – teoremning eng to'liq va eng kuchli shakli.

4. Isbot (eng aniq va batafsil varianti)

Isbotni ikki qismga bo'lamiz:

$\Rightarrow$ (zarur shart)

$\Leftarrow$ (yetarli shart)

4.1. Zarur shart: Agar tizim yechimga ega bo'lsa, unda $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b]$

Faraz qilaylik, tizim yechimga ega, ya'ni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ bor va $A x_0 = b$.

b vektorni A matritsasining ustunlari orqali chiziqli kombinatsiya sifatida ifodalanadi:

$$b = x_{01} \cdot A(:,1) + x_{02} \cdot A(:,2) + \dots + x_{0n} \cdot A(:,n)$$

Demak, b vektori $[A|b]$ matritsasining ustunlari orasida chiziqli bog'liq bo'ladi.

Shuning uchun $[A|b]$ matritsasida yangi chiziqli mustaqil ustun paydo bo'lmaydi $\rightarrow$ uning ranki A matritsasining rankidan oshmaydi:

$$\text{rank}[A|b] \leq \text{rank}(A) + 1$$

Lekin yuqoridagi ifoda tufayli b ni A ustunlari bilan ifodalash mumkin $\rightarrow \text{rank}[A|b] \leq \text{rank}(A)$

Boshqa tomondan esa $[A|b]$ matritsasida A ning barcha ustunlari bor $\rightarrow \text{rank}[A|b] \geq \text{rank}(A)$

Demak, tenglik bo'ladi: $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b]$

Zarur shart isbotlandi ✓

4.2. Yetarli shart: Agar $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b]$ bo'lsa, tizim yechimga ega

Bu qism biroz murakkabroq. Biz Gauss usulidan foydalanamiz.

$[A|b]$ kengaytirilgan matritsani elementar o'zgartirishlar orqali zina ko'rinishiga keltiramiz (reduced row echelon form – rref ga yaqin).

Elementar o'zgartirishlar rank ni saqlaydi, shuning uchun $\text{rank}(A) = \text{rank}(\text{rref}(A))$, $\text{rank}[A|b] = \text{rank}(\text{rref}[A|b])$

$\text{rref}([A|b])$ matritsasida birinchi $\text{rank}(A)$ ta satrda pivot (birinchi noldan farqli element) bor. Qolgan satrlar nol satr bo'lishi mumkin.

Agar $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b]$ bo'lsa, demak, kengaytirilgan matritsada hech qanday satr $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ c)$ shaklida bo'lmaydi, chunki bunda $c \neq 0$ bo'lsa, $\text{rank}[A|b] > \text{rank}(A)$ dan katta bo'lardi.

Demak, barcha nol satrlarning o'ng tomoni ham nol: $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ 0)$. Bu satrlar tizimga hech qanday cheklov qo'shmaydi.

Pivot ustunlardagi o'zgaruvchilar asosiy (bog'langan), qolganlari erkin o'zgaruvchi sifatida olinadi.

Har bir asosiy o'zgaruvchini erkin o'zgaruvchilar orqali ifodalab, umumiy yechimni yozish mumkin.

Demak, yechim mavjud (agar erkin o'zgaruvchi bo'lmasa – yagona, bo'lsa – cheksiz ko'p).

Yetarli shart ham isbotlandi ✓

Teorema to'liq isbotlandi.

5. Misollar orqali tushuntirish

Misol 1. Yagona yechim ($\text{rank} = 3 = n$)

$$2x + y - z = 1$$

$$x - y + 2z = 3$$

$$3x + y + z = 4$$

$[A|b]$ ni zina ko'rinishiga keltirsak $\rightarrow 3$ ta pivot $\rightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}[A|b] = 3 = n \rightarrow$ yagona yechim: $x=1, y=1, z=2$

Misol 2. Cheksiz ko'p yechim ($\text{rank} = 2 < 3$)

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 2y + 2z = 6$$

$$3x + 3y + 3z = 9$$

Uchinchi tenglama birinchining 3 baravari $\rightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}[A|b] = 1 (!)$, $n=3 \rightarrow$ cheksiz ko‘p yechim (2 ta erkin o‘zgaruvchi)

Misol 3. Yechimsiz tizim

$$x + y = 1$$

$$x + y = 2$$

$$\text{rank}(A) = 1, \text{rank}[A|b] = 2 \rightarrow \text{yechim yo‘q}$$

6. Teoremadan kelib chiqadigan muhim xulosalar (talabalar tez-tez xato qiladigan joylar)

Determinant usuli faqat kvadrat matritsalar uchun ishlaydi. Kroneker-Kapelli esa istalgan o‘lchamdagi tizimlar uchun.

Agar tizim kvadrat bo‘lib, $\det(A) \neq 0$ bo‘lsa $\rightarrow$ avtomatik $\text{rank}(A) = n \rightarrow \text{rank}[A|b]$ ham n bo‘lishi kerak $\rightarrow$ yagona yechim. Bu xususiy hol.

Eng ko‘p xato: “Agar $\text{rank}(A) = n$ bo‘lsa, har doim yechim bor” deb o‘ylash. Yo‘q! $\text{rank}[A|b]$ ham n bo‘lishi kerak.

Gauss usuli bilan hisoblashda oxirgi satr $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ 5)$ chiqsa $\rightarrow$ darhol yechim yo‘q deb xulosa qilish mumkin.

7. Qo‘shimcha: Teoremani matritsalar tilida qayta ifodalash

Tizim yechimga ega $\Leftrightarrow b$ vektori A matritsasining ustunlari hosil qilgan subspace ($\text{Im}(A)$ yoki $\text{Col}(A)$) da yotadi.

$$\text{Ya'ni } b \in \text{Col}(A)$$

Bu – teoremning vektorli subspace tilidagi eng chiroyli ifodasi.

Xulosa

Kroneker-Kapelli teoremasi lineyka tenglamalar tizimlarini o'rganishda fundamental natijadir. U nafaqat yechim mavjudligini, balki yechimlar to'plamining aniq tuzilishini ham beradi.

Teorema isboti oddiy, lekin chuqur: u matritsa rankining invariantligi va chiziqli bog'liqlik tushunchasiga asoslanadi.

Bu teoremaga to'liq ishonch hosil qilish uchun har bir talaba o'zi qo'lda bir necha o'nlab misollarni Gauss usuli bilan yechib, ranklarni solishtirishi zarur.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Anton, H., Rorres, C. Elementary Linear Algebra. 11th Edition. Wiley, 2014.
2. Lay, D. C., Lay, S. R., McDonald, J. J. Linear Algebra and Its Applications. 5th Edition. Pearson, 2016.
3. Strang, G. Introduction to Linear Algebra. 5th Edition. Wellesley-Cambridge Press, 2016.
4. Axler, S. Linear Algebra Done Right. 3rd Edition. Springer, 2015.
5. Dornhoff, L., Hohn, F. E. Applied Linear Algebra. Macmillan Publishing, 1972.
6. Gantmacher, F. R. The Theory of Matrices. Chelsea Publishing, 1959.
7. Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Dover Publications, 1999.
8. Kostrikin, A. I., Manin, Y. I. Linear Algebra and Geometry. Gordon and Breach Science Publishers, 1989.
9. Ляпунов, А. М. Линейная алгебра и её применения. Москва: Наука, 1982.
10. Ўзбекистон Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги. Chiziqli algebra va analitik geometriya: O'quv qo'llanma. Toshkent, 2020.
11. Эргашев, А., Фуломов, У. Chiziqli algebra asoslari. Toshkent: Fan nashriyoti, 2015.
12. Online Mathematics Encyclopedia — Linear Algebra Fundamentals.

mathworld.wolfram.com

13.Khan Academy — Systems of Linear Equations and Matrix Rank.