

CHIZIQLI ALMASHTIRISHNING JORDAN NORMAL SHAKLI

TURAYEV ZIYOVUDDIN O'KTAMXONOVICH

Matematika va ta'limda axborot

texnologiyasi kafedrası òqituvchisi

MUSURMONOVA YAYRA NORBUTA QIZI

Shahrisabz davlat pedagogika instituti

Matematika va informatika yònalishi

3-bosqich talabasi

Annotatsiya. Ushbu maqola Jordan normal shaklining chiziqli algebrada markaziy o'rin tutuvchi tushuncha ekanligini ta'kidlaydi, chunki u har qanday matritsani eng sodda (kanonik) ko'rinishga keltirish imkonini beradi. Bu esa chiziqli almashtirishlarning tuzilishini to'liq tahlil qilish imkonini beradi.

Абстрактный. В данной статье утверждается, что нормальная форма Жордана является центральным понятием в линейной алгебре, поскольку она позволяет привести любую матрицу к ее простейшему (каноническому) виду, что позволяет полностью проанализировать структуру линейных перестановок.

Abstract. This article argues that Jordan normal form is a central concept in linear algebra, as it allows any matrix to be reduced to its simplest (canonical) form and allows for a complete analysis of the structure of linear permutations.

Kalit so'zlar: Jordan normal shakli, chiziqli almashtirish, xos qiymat, xos vektor, Jordan bloki, algebraik ko'paytma, geometrik ko'paytma, invariant fazo, nilpotent operator, diagonalizatsiya, chiziqli fazo, kanonik shakl, spektral tahlil.

Keywords: Jordan normal form, linear transformation, eigenvalue, eigenvector, Jordan block, algebraic multiplicity, geometric multiplicity, invariant subspace, nilpotent operator, diagonalization, linear space, canonical form, spectral analysis.

Ключевые слова: Жорданова нормальная форма, линейное преобразование, собственное значение, собственный вектор, жорданов блок, алгебраическая кратность, геометрическая кратность, инвариантное подпространство, нильпотентный оператор, диагонализация, линейное пространство, каноническая форма, спектральный анализ

Kirish: Chiziqli algebra nazariyasida chiziqli almashtirishlarning tuzilishini chuqur tahlil qilish, ularning qanday asosda eng sodda ko‘rinishga keltirilishini aniqlash muhim ahamiyatga ega. Har bir chiziqli operatorning murakkabligi uning xos qiymatlari, shu qiymatlarning algebraik va geometrik ko‘paytmalariga bevosita bog‘liq bo‘lib, operatorni tushunish va unga oid masalalarni yechishda qulay shaklga keltirish zarur bo‘ladi. Shu maqsadda matematika fanida Jordan normal shakli deb ataluvchi maxsus kanonik ko‘rinish qo‘llaniladi.

Jordan normal shakli — bu chiziqli almashtirishni mos keluvchi asosni tanlash orqali eng soddalashtirilgan, ichki tuzilmasi to‘liq ochib berilgan ko‘rinishda ifodalash imkonini beradigan matematik konstruksiyadir. Ushbu shakl operatorning spektral xususiyatlarini, xususan, uning xos qiymatlari va ular bilan bog‘langan Jordan bloklarining o‘lchamlarini aniq ko‘rsatadi. Diagonalizatsiya mumkin bo‘lmagan holatlarda ham Jordan shakli operatorning qanday “darajada” diagonalga yaqinlashganini bildiradi va nilpotent tarkibni ajratib ko‘rsatadi.

Shu sababli Jordan normal shakli chiziqli differensial tenglamalar sistemalarini yechishdan tortib, murakkab matritsalar tahliliga qadar bo‘lgan ko‘plab masalalarda hal qiluvchi rol o‘ynaydi. U nafaqat nazariy, balki amaliy matematikada ham muhim o‘rin tutadi, chunki u operatorning eng muhim invariantlarini yagona struktura sifatida taqdim etadi va chiziqli fazolarda sodda, tartibli va tizimli tahlil olib borish imkonini yaratadi.

CHIZIQLI ALMASHTIRISHLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.

Chiziqli operator va uning matritsasi. Chiziqli operatorlar ustida amallar.

L chiziqli fazoni va uning A almashtirishini yoki operatorini, ya’ni har bir $x \in L$ vektorga shu L fazoning biror-bir y vektorini mos qo‘yuvchi qonunni qaraymiz. Ushbu

qonun $y = Ax$ ko'rinishida yoziladi.

Ta'rif. L fazoning har qanday z va z' vektorlari va ixtiyoriy λ haqiqiy son uchun $A(z+z')=Az+Az'$; $A(\lambda z)=\lambda Az$ tengliklar o'rinni A almashtirishi chiziqli **fazoning chiziqli almashtirishi (yoki operatori)** deyiladi.

Agar L fazo n o'lchovli bo'lib, unda $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazis tanlangan bo'lsa, u holda x vektor koordinatalari va uning aksi y vektor koordinatalari orasidagi bog'liqlik quyidagi sistema ko'rinishida aniqlanadi

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

yoki matritsa ko'rinishida $Y = AX$, bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

i -ustuni tanlangan Ae_i vektorning koordinatalaridan tuzilgan A matritsaga **chiziqli almashtirish matritsasi** deyiladi.

Bazis almashtirilib, dastlabki bazisdan yangi bazisga P^T o'tish matritsa yordamida o'tilsa, chiziqli almashtirishning dastlabki bazisdagi A matritsasiga yangi bazisda $(P^T)^{-1}AP^T$ matritsa mos keladi. A va $(P^T)^{-1}AP^T$ matritsalar **o'zaro o'xshash matritsalar** deyiladi. A matritsadan $(P^T)^{-1}AP^T$ matritsaga o'tish A **matritsani o'xshashlik almashtirishi** deyiladi. Shunday qilib, ayni bir chiziqli almashtirishga turli bazislarda o'xshash matritsalar mos keladi.

Chiziqli almashtirish ustida bajariladigan amallar.

a) Almashtirishlarni qo'shish. Ikki chiziqli almashtirishlar matritsa ko'rinishida berilgan bo'lsin: $Y = AX$, $Z = BX$. Chiziqli almashtirishlarning yig'indisi deb, quyidagicha aniqlanadigan S almashtirishga aytiladi.

$$Y + Z = (A + B)X = CX.$$

b) Almashtirishni songa ko'paytirish. Matritsa ko'rinishida $Y=AX$ chiziqli

almashtirish va ixtiyoriy λ haqiqiy son berilgan bo'lsin. Berilgan almashtirishni λ songa ko'paytmasi deb, quyidagi V almashtirishga aytiladi: $Z = (\lambda A)X = BX$.

v) Almashtirishlarni ko'paytirish. Ikki ketma-ket chiziqli almashtirishlar $Y = AX$ va $Z = BY$ berilgan bo'lsin. Y uchun ifodani birinchi formuladan ikkinchisiga qo'ysak, $Y = AX$ almashtirishning $Z = BY$ almashtirishga ko'paytmasi deb ataladigan quyidagi F almashtirishni olamiz:

$$Z = B(AX) = (BA)X = FX.$$

g) Teskari almashtirish. Matritsa shaklida $Y=AX$ chiziqli almashtirish berilgan bo'lib, A - kvadrat maxsusmas matritsa ($\det A \neq 0$) bo'lsin. Tenglama ikkala qismini chapdan teskari A^{-1} matritsaga ko'paytirib, $Y=AX$ chiziqli almashtirishning teskari almashtirishi deb ataluvchi $X=A^{-1}Y$ chiziqli almashtirishni olamiz.

Chiziqli operator xos vektori va xos qiymati

Ta'rif. Agar shunday bir λ son tanlash mumkin bo'lsaki, bunda $Ax=\lambda x$ tenglikni qanoatlantiruvchi har qanday nolmas x vektorga A **chiziqli almashtirishning xos vektori** deyiladi. λ sonning o'ziga esa A chiziqli almashtirishning x xos vektoriga mos keluvchi **xos qiymati** deyiladi.

Xos vektorlar quyidagi xossalarga ega:

1. Har bir xos vektorga yagona xos qiymat mos keladi;
2. Agar x_1, x_2 – A chiziqli almashtirishning ayni bir λ xos qiymatga mos keluvchi xos vektorlari bo'lsa, u holda ularning yig'indisi x_1+x_2 vektor ham A chiziqli almashtirishning λ xos qiymatiga mos keluvchi xos vektori bo'ladi.
3. Agar x – A chiziqli almashtirishning λ xos qiymatiga mos xos vektori bo'lsa, x ga kollinear har qanday kx vektor ham A chiziqli almashtirishning o'sha λ xos qiymatiga mos xos vektori bo'ladi.

Agar L^n fazoda bazis tanlangan bo'lsa, $Ax = \lambda x$ tenglikni matritsa shaklida yozish mumkin: $AX = \lambda X$.

Ta'rif. Tenglikni qanoatlantiruvchi har qanday nolmas ustun A matritsaning λ xos qiymatiga **mos xos vektori** deyiladi.

$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX = \lambda EX \Leftrightarrow (A-\lambda E)X = \theta$ bo'lib, oxirgi tenglik koordinatalarda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Xos vektorlarni qurish uchun sistemaning nolmas yechimlarini topish zarur. n ta noma'lumli n ta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi nolmas yechimlarga faqatgina sistema determinanti nolga teng bo'lgandagina ega bo'ladi, ya'ni

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{yoki}$$

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \text{ bu yerda, } a_n = (-1)^n, a_0 = \det A.$$

Oxirgi yozilgan tenglamalar A matritsaning xarakteristik tenglamalari, uning ildizlari esa xarakteristik sonlari yoki A matritsaning xos qiymatlari deyiladi.

Misol. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping.

Xarakteristik tenglama tuzamiz va uni yechib, A matritsaning xos qiymatlarini aniqlaymiz:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1; 6\}$$

$\lambda_1 = 1$ xos qiymatga mos xos vektorlardan birini quramiz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}, \text{ ya'ni } X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 6$ xos qiymatga mos xos vektorlardan biri esa:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matritsaning xarakteristik ko'phadi bazis tanlanishiga bog'liq emas. Ayni bir chiziqli almashtirishga turli bazislarda o'xshash matritsalar mos kelgani uchun, o'xshash matritsalarining xarakteristik ko'phadlari tengdir. Agar $x_1, x_2, \dots, x_k$ xos vektorlar juft-jufti bilan turli xos qiymatlarga tegishli bo'lsa, ular chiziqli erkli sistemani tashkil etadi.

O'z-o'ziga qo'shma va unitar almashtirishlar.

1. Ikkita unitar almashtirishlarning ko'paytmasi yana unitar almashtirish bo'lishini isbotlang.

Yechish. $(AB)(AB)^* = (AB)(B^*A^*) = A(BB^*)A^* = AEA^* = AA^* = E$. Xuddi shu kabi $(AB)^*(AB) = E$ tenglik ham o'rinli.

2. Xar qanday U unitar almashtirish n o'lchamli V Yevklid fazosida skalyar ko'paytmani saqlashini isbotlang. Va aksincha, skalyar ko'paytmani saqlovchi xar qanday U chiziqli almashtirish unitar almashtirish bo'lishini ko'rsating.

Yechish. Agar $U^*U = E$ bo'lsa, u holda

$$(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, Ey) = (x, y).$$

Agar xar qanday x va y vektorlar uchun $(Ux, Uy) = (x, y)$ bo'lsa, u holda

$(x, Ey) = (x, y) = (Ux, Uy) = (x, U^*Uy)$. Bichiziqli formalarning tengligidan mos almashtirishlar tengligi kelib chiqadi, shuning uchun $U^*U = E$, ya'ni U unitar almashtirish.

3. Unitar almashtirishning xos sonlari moduli nimaga teng?

4. e vektor U unitar chiziqli almashtirishning xos vektori bo'lsin. $V_1 = \{x \in V \mid (x, e) = 0\}$ to'plam U almashtirishga nisbatan $(n-1)$ o'lchamli invariant qism fazo tashkil qilishini ko'rsating.

5. n o'lchamli Yevklid fazosidagi U unitar chiziqli almashtirish n ta juft-jufti bilan ortogonal bo'lgan xos vektorlarga ega bo'lishini isbotlang.

6. Berilgan A ortogonal matritsaning $B = C^{-1}AC$ shartni qanoatlantiruvchi B ni kanonik ko'rinishini va C orthogonal matritsalarini toping.

Yechish. Ushbu $\det(A - \lambda E) = 0$ tenglamani qaraymiz:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Bundan quyidagi tenglamani olamiz:

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$$

Bu tenglamani uchta $\lambda_1 = 1$ va $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$ ildizlarini hosil qilamiz. Bu sonlar A matritsaning xos sonlarini tashkil etadi.

Bizga ma'lumki, Yevklid fazosida berilgan ixtiyoriy orthogonal chiziqli almashtirish uchun shunday ortonormal bazis mavjudki, bu bazisda chiziqli chiziqli almashtirishni quyidagicha yozish mumkin:

$$B = \text{diag}(1, R_\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Endi ortonormal bazisni topamiz. Buning uchun e_1, e_2, e_3 bazisni ortonormal f_1, f_2, f_3 bazisga o'tkazuvchi C matritsani topamiz.

$\lambda_1 = 1$ xos son uchun $(A - \lambda E)X = 0$ bir jinsli tenglamalar sistemasini yechib

$X_1 = (1, 1, 1)$ xos vektorni topamiz. Bendan $C_1 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})^T$ ni hosil qilamiz. Huddi

shunday A matritsaning λ_2 va λ_3 xos sonlariga mos ravishda $C_2 = (-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})^T$ va

$C_3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)^T$ vektorlarini topamiz.

Demak

$$C = (C_1, C_2, C_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Bulardan $B = C^{-1}AC$ tenglik bajarilishini oson tekshirish mumkin.

Berilgan A matritsaga $B = C^{-1}AC$ shartni qanoatlantiruvchi B diagonal va C unitar matritsalarini toping.

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Chiziqli almashtirishning Jordan normal shakli

Ushbu mavzuda kompleks fazoda berilgan ixtiyoriy almashtirish uchun uning matritsasini birmuncha sodda ko'rinishga keltiruvchi bazisni ko'rsatamiz.

Aytaylik n o'lchamli kompleks fazoda A chiziqli almashtirish berilgan bo'lsin. Agar A chiziqli almashtirish n ta chiziqli erkli xos vektorlarga ega bo'lsa, bu xos vektorlarni bazis sifatida tanlab, chiziqli almashtirish matritsasi diagonal shaklga keltiriladi.

Chiziqli almashtirishning chiziqli erkli xos vektorlari soni n dan kichik bo'lsa, uning matritsasi diagonal shaklga yaqin bo'lgan normal shaklga keltiriladi. Ta'kidlash joizki, n o'lchamli kompleks fazodagi A chiziqli almashtirish turli hil k ta $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k$ xos qiymatlarga ega bo'lsa, u holda A almashtirish k tadan kam bo'lmagan chiziqli erkli xos vektorlarga ega. Umuman olganda, chiziqli erkli xos vektorlar soni turli xos qiymatlar sonidan katta bo'lishi mumkin.

Teorema. n o'lchamli kompleks fazoda ixtiyoriy A chiziqli almashtirish berilgan bo'lib, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k$ uning xos sonlari va bu xos sonlarga mos keluvchi $m (m \geq k)$ xos vektorlar bo'lsin.

$$\text{U holda } e_1, e_2, e_3, \dots, e_k: f_1, f_2, f_3, \dots, f_k: h_1, h_2, h_3, \dots, h_k \quad (1.1)$$

vektorlardan iborat bazis mavjudki, A almashtirish (1.1) ko'rinishda bo'ladi. Bu teoremani isbotlashdan avval ko'rinishidagi chiziqli almashtirishlarning xossalarni o'rganib chiqamiz. Ravshanki, (33.2) ko'rinishidagi chiziqli almashtirish $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ vektorlarni yana shu vektorlarga o'tkazadi. Xuddi shunday boshqa bazis vektorlar jamlanmasi ham shu vektorlarga o'tkazadi. Demak, bazis vektorlarning xar bir jamlanmasi A almashtirishga nisbatan invariant qism fazo tashkil qiladi.

Bundan tashqari, xar bir qism fazoda bittadan xos vektor bor. Masalan, $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ vektorlarga tortilgan qism fazoda vektor xos vektor bo'ladi. Endi bu qism fazolarning xar birida faqat bitta xos vektor bor ekanligini ko'rsataylik. Haqiqatdan ham, agar $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ bazis vektorlardan tuzilgan qism fazoda biror $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ vektor xos vektor bo'lsa,

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya., Algebra and Number theory. 2010. – 523 p.
2. Everest G., Ward T. An Introduction to Number Theory. 2006. – 297 p.

3. James J.T. Elementary number theory in nine chapters. 1999. – 417 p.
4. Kuttler K. Elementary linear algebra. 2012. – 433 p.
5. Strang G. Introduction to Linear algebra. 2016. – 584 p.
6. Бухштаб А.А. Теория чисел. 1966. – 386 с.
7. Веретенников Б.М., Михалева М.М., Алгебра и теория чисел. Учебное пособие. 2014. – 52 с.
8. Виноградов И.М. Основы теории чисел. 1948. – 178 с.
9. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. 1998. – 320 с.
10. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. 2000. – 272 с.
11. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. 2000. – 368 с.
12. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва. 1979. – 559 с.