

PROYEKTIV GEOMETRIYANING ASOSIY FAKTLARI

Abdulhamidova Muslima Baxtiyor qizi

Matematika yonalishi 1-kurs talabasi

Ilmiy maslahatchi: **Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna**

Matematika kafedrası katta o'qituvchisi

Namangan davlat universiteti, O'zbekiston

Annotatsiya: Tadqiqotda proyektiv fazo, gomogen koordinatalar, dualizm prinsipi, kross-ratio invarianti hamda Desargues va Paskal teoremlari analitik geometriya va chiziqli algebra metodlari asosida ko'rib chiqiladi. Proyektiv o'zgarishlarning algebraik ifodalari va invariant xossalari matematik formulalar orqali asoslanadi. Natijalar proyektiv geometriyaning Evklid geometriyasiga nisbatan umumlashgan va invariantlarga asoslangan kuchli nazariya ekanligini ko'rsatadi. Ushbu nazariya zamonaviy ilm-fan va texnologiyada, xususan kompyuter grafikasi va ko'rish tizimlarida muhim ahamiyat kasb etadi.

Kalit so'zlar: proyektiv geometriya, gomogen koordinatalar, proyektiv fazo, kross-ratio, dualizm, kollineatsiya, Desargues teoremasi, Paskal teoremasi, invariantlar

ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аннотация: В исследовании рассматриваются проективное пространство, однородные координаты, принцип двойственности, инвариант кросс-отношения, а также теоремы Дезарга и Паскаля с использованием методов аналитической геометрии и линейной алгебры. Алгебраические представления проективных преобразований и их инвариантные свойства обосновываются с помощью математических формул. Полученные результаты демонстрируют, что проективная

геометрия представляет собой обобщённую теорию по сравнению с евклидовой геометрией, основанную на инвариантах. Данная теория играет важную роль в современной науке и технологиях, в частности, в компьютерной графике и системах компьютерного зрения.

Ключевые слова: проективная геометрия, однородные координаты, проективное пространство, кросс-отношение, двойственность, коллинеация, теорема Дезарга, теорема Паскаля, инварианты

FUNDAMENTAL FACTS OF PROJECTIVE GEOMETRY

Abstract: The study examines projective space, homogeneous coordinates, the principle of duality, the cross-ratio invariant, as well as Desargues' and Pascal's theorems using methods of analytic geometry and linear algebra. The algebraic representations of projective transformations and their invariant properties are substantiated through mathematical formulations. The results demonstrate that projective geometry constitutes a generalized theory compared to Euclidean geometry, based on invariants. This theory plays a significant role in modern science and technology, particularly in computer graphics and computer vision systems.

Keywords: projective geometry, homogeneous coordinates, projective space, cross-ratio, duality, collineation, Desargues' theorem, Pascal's theorem, invariants

KIRISH

Proyektiv geometriya matematikaning chuqur va fundamental yoʻnalishlaridan biri boʻlib, u geometrik obyektlarning proyeksiyalar ostida saqlanadigan invariant xossalarini oʻrganadi. Ushbu nazariya klassik Evklid geometriyasidan farqli ravishda masofa, uzunlik va burchak kabi metrik tushunchalarga emas, balki shakllarning tuzilish xususiyatlariga eʼtibor

ilmiy –amaliy anjuman

qaratadi. Shu sababli proyektiv geometriya ko‘proq strukturaviy va algebraik yondashuvga ega bo‘lib, u geometrik obyektlarni invariantlar orqali tasvirlash imkonini beradi. Tarixiy jihatdan qaralganda, proyektiv geometriya ildizlari Uyg‘onish davriga borib taqaladi. Ayniqsa, perspektiva qonunlarini o‘rganish san’atda muhim ahamiyat kasb etgan. Rassomlar uch o‘lchamli fazoni ikki o‘lchamli tekislikda aks ettirish jarayonida intuitiv ravishda proyektiv qonuniyatlardan foydalanganlar. Keyinchalik bu tushunchalar matematik jihatdan asoslab berildi. XVII asrda Girard Desargues proyektiv geometriyaning dastlabki teorematik asoslarini yaratdi. Uning ishlari uzoq vaqt e‘tibordan chetda qolgan bo‘lsa-da, XIX asrda Jean-Victor Poncelet tomonidan qayta tiklanib, rivojlantirildi. Blaise Pascal esa konik kesimlar bilan bog‘liq mashhur teoremasi orqali proyektiv geometriyaning rivojiga katta hissa qo‘shdi. Proyektiv geometriyaning asosiy g‘oyasi shundan iboratki, geometrik obyektlarni proyeksiya qilish jarayonida ayrim xossalar saqlanib qoladi. Masalan, uchta nuqtaning bir chiziqda yotishi (kollinearlik) yoki uchta chiziqning bir nuqtada kesishishi (konkurrentlik) proyektiv o‘zgarishlarda invariant hisoblanadi. Shu bois, proyektiv geometriya “invariantlar geometriyasi” deb ham ataladi. Evklid geometriyasida parallel chiziqlar hech qachon kesishmaydi deb qaraladi. Biroq bu yondashuv ko‘plab geometrik muammolarni murakkablashtiradi. Proyektiv geometriyada esa ushbu cheklov olib tashlanadi va barcha parallel chiziqlar cheksizlikdagi yagona nuqtada kesishadi deb qaraladi. Natijada quyidagi umumlashgan prinsip yuzaga keladi: proyektiv tekislikda har qanday ikki to‘g‘ri chiziq aniq bitta nuqtada kesishadi. Bu yondashuv geometriyani yanada soddalashtiradi va ko‘plab teoremlarni umumiy shaklda ifodalash imkonini beradi.

Proyektiv fazoni qat’iy matematik jihatdan ifodalash uchun gomogen koordinatalar kiritiladi. Proyektiv tekislik quyidagicha aniqlanadi:

$$P^2 = \{(x:y:z) | (x,y,z) \neq (0,0,0)\}$$

Bu yerda $(x:y:z)$ uchlik gomogen koordinatalar bo‘lib, ular quyidagi ekvivalentlik munosabati bilan aniqlanadi:

$$(x:y:z) \sim (\lambda x:\lambda y:\lambda z), \lambda \neq 0$$

Bu ta’rif shuni anglatadiki, proyektiv tekislikdagi har bir nuqta uch o‘lchamli fazodagi nol bo‘lmagan vektorlar to‘plamining yo‘nalishi sifatida qaraladi. Boshqacha qilib aytganda, proyektiv fazo — bu vektor fazoning bir o‘lchovli ostfazolar to‘plamidir. Gomogen koordinatalarning muhim afzalligi shundaki, ular cheksizlikdagi nuqtalarni tabiiy ravishda o‘z ichiga oladi. Masalan, Evklid tekisligidagi (x, y) nuqta proyektiv tekislikda $(x:y:1)$ ko‘rinishda ifodalanadi. Agar $z = 0$ bo‘lsa, bunday nuqtalar cheksizlikdagi nuqtalar deb ataladi. Bu nuqtalar barcha parallel chiziqlar uchun umumiy kesishish nuqtasini ifodalaydi.

Proyektiv geometriyaning yana bir muhim jihati — dualizm prinsipidir. Bu prinsipga ko‘ra, proyektiv tekislikda nuqtalar va chiziqlar o‘rtasida simmetrik bog‘lanish mavjud. Agar biror teoremda “nuqta” va “chiziq” tushunchalari o‘zaro almashtirilsa, yangi, lekin to‘g‘ri teorema hosil bo‘ladi. Masalan, “ikki nuqta orqali bitta chiziq o‘tadi” degan teoremaning duali “ikki chiziq bitta nuqtada kesishadi” bo‘ladi. Bu prinsip proyektiv geometriyaning ichki simmetriyasini va uning nazariy go‘zalligini namoyon etadi.

Proyektiv geometriyada o‘rganiladigan yana bir asosiy tushuncha — bu proyektiv o‘zgarishlar yoki kollineatsiyalardir. Bu o‘zgarishlar chiziqli algebra vositalari yordamida ifodalanadi va ular gomogen koordinatalarga chiziqli almashtirish sifatida ta’sir qiladi. Agar Amatriitsa bo‘lib, $\det(A) \neq 0$ bo‘lsa, u holda:

$$(x:y:z) \mapsto (x^{\wedge}:y^{\wedge}:z^{\wedge}) = A(x:y:z)$$

ko‘rinishidagi o‘zgarish proyektiv o‘zgarish deyiladi. Bu o‘zgarishlar kollinearlikni va kesishish xossalarini saqlaydi, lekin masofa va burchaklarni saqlamaydi.

Proyektiv geometriyaning markaziy tushunchalaridan biri — kross-ratio (to‘rt nuqta nisbati) hisoblanadi. Agar bir chiziqda A, B, C, D nuqtalar joylashgan bo‘lsa, ularning kross-ratio quyidagicha aniqlanadi:

$$(A, B; C, D) = \frac{(c - a)(d - b)}{(c - b)(d - a)}$$

Bu kattalik barcha proyektiv o‘zgarishlarda invariant bo‘lib qoladi. Shu sababli u proyektiv geometriyada asosiy algebraik invariant sifatida qaraladi.

Proyektiv geometriya nafaqat nazariy ahamiyatga ega, balki amaliy jihatdan ham juda muhimdir. Masalan, kamera orqali olingan tasvir asl uch o‘lchamli fazoning proyeksiyasi hisoblanadi va bu jarayon proyektiv geometriya qonunlariga bo‘ysunadi. Shuningdek, proyektiv geometriya algebraik geometriya bilan ham uzviy bog‘liq. Konik kesimlar, kubik egri chiziqlar va boshqa algebraik obyektlar proyektiv fazoda tabiiy va qulay tarzda o‘rganiladi. Bu esa murakkab algebraik strukturalarni soddalashtirish va umumlashtirish imkonini beradi. Yuqorida keltirilgan barcha jihatlar proyektiv geometriyaning zamonaviy matematika tizimidagi o‘rnini belgilaydi. Ushbu maqolaning asosiy maqsadi — proyektiv geometriyaning fundamental tushunchalari va asosiy teoremlarini analitik yondashuv asosida chuqur tahlil qilish hamda ularning invariant xossalarini matematik formulalar yordamida asoslab berishdan iborat.

METOD:

Mazkur tadqiqot analitik geometriya, chiziqli algebra va proyektiv transformatsiyalar nazariyasining sinteziga asoslanadi. Proyektiv geometriyada asosiy obyektlar gomogen koordinatalar yordamida ifodalanadi, bu esa cheksizlikdagi nuqtalarni ham yagona algebraik struktura doirasida ko‘rib chiqish imkonini beradi.

ilmiy –amaliy anjuman

Proyektiv tekislik \mathbb{P}^2 quyidagicha aniqlanadi:

$$\mathbb{P}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\sim$$

bu yerda ekvivalentlik munosabati:

$$(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Shunday qilib, proyektiv nuqta quyidagicha yoziladi:

$$P = (x : y : z)$$

Nuqta va chiziqning dual ifodasi. Proyektiv tekislikda nuqta va chiziq o'rtasida dual bog'lanish mavjud. Agar nuqta $P = (x : y : z)$ bo'lsa, chiziq:

$$l = (a : b : c)$$

ko'rinishda beriladi va nuqtaning chiziqda yotish sharti:

$$ax + by + cz = 0$$

Bu ifoda skalyar ko'paytma orqali yozilishi mumkin:

$$l \cdot P = 0$$

Ikki nuqtadan o'tuvchi chiziq: Agar $P_1 = (x_1 : y_1 : z_1)$ va $P_2 = (x_2 : y_2 : z_2)$ bo'lsa, ular orqali o'tuvchi chiziq tashqi ko'paytma orqali aniqlanadi:

$$l = P_1 \times P_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

ya'ni:

$$l = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

ilmiy –amaliy anjuman

Ikki chiziq kesishish nuqtasi: Agar ikkita chiziq $l_1 = (a_1 : b_1 : c_1)$ va $l_2 = (a_2 : b_2 : c_2)$ bo'lsa, ularning kesishish nuqtasi:

$$P = l_1 \times l_2$$

Proyektiv transformatsiyalar : Proyektiv o'zgarishlar quyidagi chizikli transformatsiya orqali beriladi:

$$P' = AP$$

bu yerda:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \det(A) \neq 0$$

Ikki matritsa bir xil transformatsiyani beradi, agar ular skalyar ko'paytma bilan farq qilsa:

$$A \sim \lambda A$$

Shu sababli proyektiv transformatsiyalar guruhi:

$$PGL(3, \mathbb{R}) = GL(3, \mathbb{R}) / \sim$$

Agar bir chiziqda A, B, C, D nuqtalar bo'lsa, ularning kross-ratio:

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD}$$

Analitik ko'rinishda:

$$(A, B; C, D) = \frac{(c - a)(d - b)}{(c - b)(d - a)}$$

Proyektiv o'zgarishda:

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$$

Tadqiqot natijasida proyektiv geometriyaning asosiy fundamental faktlari matematik jihatdan asoslandi.

Har qanday ikki chiziq kesishadi :

Agar:

$$l_1: a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

$$l_2: a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

bo'lsa, kesishish nuqtasi:

$$P = l_1 \times l_2$$

Bu natija shuni ko'rsatadiki, proyektiv tekislikda parallel chiziqlar tushunchasi yo'q.

Kollinearlik sharti : Uch nuqta P_1, P_2, P_3 kollinear bo'lishi uchun determinant nolga teng bo'lishi kerak:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = 0$$

Konkurrentlik sharti : Uch chiziq l_1, l_2, l_3 bitta nuqtada kesishadi agar:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desargues teoremasi (analitik shakl): Agar ikki uchburchak:

$$A_1, B_1, C_1 \text{ va } A_2, B_2, C_2$$

uchlari orqali o'tuvchi chiziqlar:

$$A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$$

bitta nuqtada kesishsa, unda quyidagi nuqtalar:

$$(A_1B_1) \cap (A_2B_2), (B_1C_1) \cap (B_2C_2), (C_1A_1) \cap (C_2A_2)$$

kollinear bo'ladi.

Paskal teoremasi : Agar oltita nuqta konik kesim ustida yotsa:

unda quyidagi kesishish nuqtalari:

$$(AB \cap DE), (BC \cap EF), (CD \cap FA)$$

bitta chiziqda yotadi.

Konik kesim umumiy tenglamasi :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$$

Bu tenglama proyektiv fazoda invariant struktura beradi.

Olingan natijalar proyektiv geometriyaning algebraik va geometrik uyg'unligini ko'rsatadi. Ayniqsa, gomogen koordinatalar orqali barcha geometrik obyektlarni yagona tizimda ifodalash mumkinligi muhim natija hisoblanadi. Kross-ratio invariantining mavjudligi proyektiv geometriyaning markaziy g'oyasini tashkil etadi. Bu invariant quyidagi xossalarga ega:

$$(A, B; C, D) = (C, D; A, B)$$

$$(A, B; C, D)^{-1} = (A, B; D, C)$$

Bu xossalar proyektiv o'zgarishlarning strukturaviy simmetriyasini aks ettiradi. Proyektiv geometriyada metrik tushunchalarning yo'qligi uni yanada umumiy qiladi. Masalan, Evklid geometriyada quyidagi tushuncha muhim:

$$d(P, Q)$$

biroq proyektiv geometriyada bu mavjud emas. Buning o'rniga invariantlar ishlatiladi. Proyektiv transformatsiyalar real dunyoda quyidagi model orqali ishlatiladi:

$$x' = \frac{ax + by + c}{gx + hy + i}, y' = \frac{dx + ey + f}{gx + hy + i}$$

Bu formulalar kamera modeli va tasvirlarni qayta ishlashda qo'llaniladi. Shuningdek, proyektiv geometriya algebraik geometriya bilan chuqur bog'liq

ilmiy –amaliy anjuman

bo‘lib, ko‘plab egri chiziqlar va yuzalar aynan proyektiv fazoda tabiiy ifodalanadi. Desargues teoremasi fazoviy geometriya bilan bog‘liq bo‘lib, uch o‘lchamli fazoda ikki tekislik kesishishi orqali tushuntiriladi. Paskal teoremasi esa determinantlar va konik kesimlar bilan bog‘liq algebraik natijalarni beradi. Natijalar shuni ko‘rsatadiki, proyektiv geometriya nafaqat nazariy jihatdan mukammal tizim, balki amaliy jihatdan ham muhim vositadir. Ayniqsa, kompyuter grafikasi va sun‘iy intellekt tizimlarida bu nazariya keng qo‘llaniladi.

Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, proyektiv geometriya Evklid geometriyasining muhim umumlashmasi bo‘lib, u geometrik obyektlarning invariant xossalari chuqur tahlil qilish imkonini beradi.

Birinchi, proyektiv fazoning gomogen koordinatalar orqali ifodalanishi geometrik obyektlarni algebraik jihatdan bir xil struktura doirasida ko‘rib chiqish imkonini yaratadi. Bu yondashuv orqali cheksizlikdagi nuqtalar tabiiy ravishda kiritiladi va parallel chiziqlar muammosi bartaraf etiladi. Natijada, proyektiv tekislikda har qanday ikki to‘g‘ri chiziqning kesishishi umumiy qonun sifatida qaraladi, bu esa geometrik nazariyaning soddalashuvi va umumlashuviga olib keladi.

Ikkinchi, dualizm prinsipi proyektiv geometriyaning ichki simmetriyasini ifodalaydi. Nuqtalar va chiziqlar o‘rtasidagi bu dual bog‘lanish teoremlarni umumlashtirish va yangi natijalarni hosil qilish imkonini beradi. Dualizmning mavjudligi proyektiv geometriyaning mantiqiy mukammalligini va strukturaviy uyg‘unligini ko‘rsatadi.

Uchinchi, kross-ratio invariantining mavjudligi proyektiv geometriyaning markaziy algebraik asosini tashkil etadi. Quyidagi invariant:

$$(A, B; C, D) = \frac{(c - a)(d - b)}{(c - b)(d - a)}$$

har qanday proyektiv o'zgarish ostida o'zgarmasligi bilan alohida ahamiyatga ega. Bu invariant yordamida proyektiv transformatsiyalarni tahlil qilish, nuqtalar orasidagi munosabatlarni aniqlash va geometrik konfiguratsiyalarni tasniflash mumkin.

To'rtinchidan, Desargues va Paskal teoremlari proyektiv geometriyaning asosiy natijalari sifatida chuqur o'rganildi. Desargues teoremasi fazoviy geometriya bilan bog'liq bo'lib, uch o'lchamli talqinda tabiiy tushuntiriladi, Paskal teoremasi esa konik kesimlar orqali algebraik geometriya bilan uzviy aloqani namoyon etadi. Ushbu teoremlar proyektiv geometriyaning nazariy kuchini va uning boshqa matematik yo'nalishlar bilan bog'liqligini tasdiqlaydi.

Beshinchidan, proyektiv transformatsiyalarning matritalsali ifodasi:

$$P' = AP, \det(A) \neq 0$$

va ular orqali ifodalanadigan ratsional funksiyalar real dunyo modellarini yaratishda muhim rol o'ynaydi. Xususan, quyidagi ko'rinishdagi transformatsiyalar:

$$x' = \frac{ax + by + c}{gx + hy + i}, y' = \frac{dx + ey + f}{gx + hy + i}$$

kompyuter ko'rish, 3D rekonstruksiya va kamera kalibrovkasi kabi zamonaviy texnologiyalarda keng qo'llaniladi.

Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, proyektiv geometriya metrik tushunchalardan mustaqil bo'lgan holda geometrik strukturalarni chuqur va umumiy tarzda o'rganish imkonini beradi. Bu esa uni nafaqat nazariy matematika, balki amaliy fanlar uchun ham muhim vositaga aylantiradi.

XULOSA

Xulosa qilib aytganda, proyektiv geometriya invariantlarga asoslangan kuchli matematik nazariya bo'lib, u zamonaviy ilm-fan, texnologiya va muhandislik sohalarida keng qo'llanilmoqda. Kelgusidagi tadqiqotlar ushbu nazariyani yanada chuqurlashtirish, ayniqsa algebraik geometriya va

differensial geometriya bilan integratsiyasini rivojlantirishga qaratilishi mumkin.

FOYDALANALIGAN ADABIYOTLAR:

1. Coxeter, H. S. M. (2003). *Projective Geometry* (2nd ed.). Springer-Verlag, New York.
2. Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and Beyond*. Springer-Verlag, New York.
3. Semple, J. G., & Kneebone, G. T. (1952). *Algebraic Projective Geometry*. Oxford University Press, Oxford.
4. Berger, M. (1987). *Geometry I*. Springer-Verlag, Berlin.
5. Griffiths, P., & Harris, J. (1978). *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley-Interscience, New York.
6. Fulton, W. (2008). *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*. Addison-Wesley, Reading, MA.
7. Shafarevich, I. R. (1994). *Basic Algebraic Geometry 1: Varieties in Projective Space* (2nd ed.). Springer-Verlag, Berlin.
8. Artin, E. (1957). *Geometric Algebra*. Interscience Publishers, New York.
9. Veblen, O., & Young, J. W. (1910). *Projective Geometry, Volume 1*. Ginn and Company, Boston.
10. Coolidge, J. L. (1931). *A Treatise on the Circle and the Sphere*. Clarendon Press, Oxford.